

河北师范大学

2020 年硕士研究生招生考试试题

学科专业名称	数 学		
科目代码	821	科目名称	高等代数
*考生必须将答案写在答题纸上, 试题纸上答题无效。 一、(15 分) 设 P 是一个数域, $f(x) \in P[x]$, $a \in P$, $(x - a) \mid f(x)$. 证明: $(x^n - a^n) \mid f(x^n)$. 二、(15 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1^2 + a_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 + a_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 + a_n \end{vmatrix}, (a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n).$ 三、(15 分) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}, \alpha_{n-r+1}$ 为 n 元非齐次线性方程组 $AX = B$ 的 $n - r + 1$ 个线性无关的解向量, 且秩 $(A) = r$. 问 $\alpha_1 - \alpha_{n-r+1}, \dots, \alpha_{n-r} - \alpha_{n-r+1}$ 是否为导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 并说明理由. 四、(15 分) 设 A 是 $n \times (n + 1)$ 矩阵, E_n 是 n 阶单位矩阵, 证明: 存在 $(n + 1) \times n$ 矩阵 B 使得 $AB = E_n$ 的充要条件是 A 的秩为 n. 五、(15 分) 证明: n 阶实矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是存在一个正定矩阵 B 使得 $A = B^2$. 六、(15 分) 令 $V = \{f(x) \mid f(x) \text{ 是实系数多项式且 } f(1) = 0, \partial(f(x)) \leq n\}$. 证明: V 是实数域上线性空间, 并求 V 的一组基.			

七、(15 分) 设 V 是数域 P 上的有限维线性空间, V_1 是 V 的非零子空间, 如果存在唯一的子空间 V_2 使得 $V = V_1 \oplus V_2$, 证明: $V_1 = V$.

八、(15 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = E$, 证明: 存在正交阵 T 使得

$$T'AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } T' \text{ 是 } T \text{ 的转置.}$$

九、(15 分) 设 P 是一个数域, 对于线性空间 P^n 上的线性变换 σ :

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n).$$

证明 $\sigma^2 = \sigma$, 并求 σ 的核.

十、(15 分) 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 σ 在某组基下的矩阵为对角矩阵, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 是 σ 的全部不同的特征值.

证明: 存在 V 的线性变换 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ 使得 $\sigma = \lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_r \sigma_r$

且 $\varepsilon = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$, 其中 ε 为恒等变换.