南京审计大学

2021 年硕士研究生招生考试初试（笔试）试题（　A 卷　）

科目代码:　813
科目名称:　概率论与数理统计　　　　满分:　150　分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项;②所有答案必须写在答题纸上,写在本试题纸或草稿纸上均无效;③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，

（1）求 $Y=|X|$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$；（2）求 Y 的变异系数。

2. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} x, & 0<y<\dfrac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$；（2）求 Y 的边缘密度 $f_Y(y)$；（3）求概率 $P(X>Y)$。

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\mu,1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

$$H_0: \ \mu=2, H_1: \ \mu=3,$$

若检验由拒绝域 $W=\{\bar{X}\geq 2.6\}$ 确定。

（1）当 $n=20$ 时，求检验犯两类误差的概率；

（2）如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta\leq 0.01$，n 最小应取多少？

二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4。比赛可采用三局二胜制或者五局三胜制，问哪一种比赛制度对甲更有利？（需要分别计算甲在这两个比赛制度下的获胜概率）

2. （1）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体密度函数 $f(x;\theta)=\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, x>c, c>0, \theta>1$ 的样本，求参数 θ 的最大似然估计；

（2）设总体为均匀分布 $U(\theta,\theta+1)$，θ 的先验分布为均匀分布 $U(10,16)$。现有三个观测值：11.7，11.1，12.0。求 θ 的后验分布。

3. 在无理数 $\pi = 3.1415926\cdots$ 的前 800 位小数中，数字 $0,1,2,\cdots,9$ 各出现的次数如下：

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频数	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

利用皮尔逊 χ^2 拟合优度检验方法，检验这 10 个数字的出现是否是等概率的？（$\alpha = 0.05$）

三、应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，（1）求投掷 r 次都出现国徽的概率；（2）已知投掷 r 次都出现国徽，问这枚硬币是正品的概率。

2. 现在人民富裕了，小轿车越来越多，各小区的车位日益紧张。假设一小区有 200 个家庭，每个家庭拥有汽车辆数 X 的分布律为 $P(X=0)=0.1$，$P(X=1)=0.6$，$P(X=2)=0.3$，求需要多少车位，才能使每辆汽车都拥有一个车位的概率至少为 0.95。

3. 在钢丝碳含量对于电阻效应的研究中，得到以下数据：

碳含量 x (%)	0.10	0.30	0.40	0.55	0.70	0.80	0.95
电阻 y ($\mu\Omega$)	15	18	19	21	22.6	23.8	26

经计算 $\sum_{i=1}^{7} x_i = 3.8, \sum_{i=1}^{7} y_i = 145.4, \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 2.595, \sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 3104.2, \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 85.61$，

（1） 建立线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$；

（2） 使用 t 检验对建立的回归方程做显著性检验(α=0.01)。

（3） 求 $x = 0.50$ 处观察值 y 置信水平为 0.95 的预测区间。

四、证明题（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 设 X_1, X_2 是来自正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，证明 $Y = \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right)^2 \sim F(1,1)$.

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的简单随机样本，证明 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 是充分统计量。

（本试卷可能用到的数和分位数：$\sqrt{5} = 2.236$，$\sqrt{2} = 1.414$，$\Phi(1.645) = 0.95$，$\Phi(2.68) = 0.9963$，$\Phi(1.79) = 0.9633$，$\Phi(2.33) = 0.9900$，$\chi^2_{0.05}(9) = 3.325$, $\chi^2_{0.05}(10) = 3.940$, $\chi^2_{0.95}(9) = 16.919$, $\chi^2_{0.95}(10) = 18.307$，$t_{0.995}(5) = 4.0322$，$t_{0.975}(5) = 2.5706$，$t_{0.995}(7) = 3.4995$，$t_{0.975}(5) = 2.3646$，这里分位数均为下侧分位数）