

安徽师范大学

2021 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 895

科目名称: 概率论与数理统计

1、(10 分) 若每条蚕的产卵数服从参数为 λ 的泊松 (Poisson) 分布 $P(\lambda)$, 而每个卵变为成虫的概率为 p , 且各卵是否变为成虫彼此独立, 求每条蚕养活 k 只小蚕的概率?

2、(20 分) 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明: (1) X 与 Y 不独立; (2) X^2 与 Y^2 独立.

3、(15 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立且都服从参数为 $p \in (0, 1)$ 的几何分布 $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$. 求极大次序统计量 $X_{(n)}$ 和极小次序统计量 $X_{(1)}$ 的分布律.

4、(15 分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 具有概率密度函数

$$p(x, y) = \begin{cases} 2(x + y), & 0 < x \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 X, Y 的相关系数 ρ_{XY} .

5、(20 分) 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta > 0$ 为未知参数。 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为一个容量为 n ($n > 1$) 的样本。

(1) 证明: 极大次序统计量 $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 和 $2\bar{X}$ 都是 θ 的无偏估计, 其中 $\bar{X}$ 为样本均值;

(2) 上述两个估计哪个更有效.

6、(15 分) 设总体 $X \sim N(0, 2^2)$, 从中抽取一个容量为 10 的样本 $X_1, \dots, X_{10}$, 记

$$Y = C_1(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 + C_2(X_5 + \cdots + X_{10})^2,$$

试确定常数 C_1, C_2 使得 Y 服从卡方 χ^2 分布, 并指出该卡方分布的自由度.

7、(15 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均为未知参数, $X_1, \dots, X_n$ 为一个容量为 n 的样本. 求 μ 和 σ 的极大似然估计.

8、(10 分) 用特征函数的方法证明二项分布的可加性: 若随机变量 $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$, 且 X 与 Y 独立, 则 $X + Y \sim B(n + m, p)$, 其中 $p \in (0, 1)$.

9、(15 分) 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验, 测得数据的样本均值和样本标准差分别为 $\bar{X} = 457.5, s = 35$.

(1) 若已知 $\sigma = 30$, 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间.

10、(15 分) 某厂铸造车间为提高铸件的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以取代铜合金铸件, 为此从镍合金和铜合金铸件中各抽取一个容量为 9 和 16 的样本, 分别测得样本均值为 73.39 和 68.27, 样本方差分别为 2.625 和 2.05. 根据经验, 硬度服从正态分布, 且方差保持不变. 请问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 镍合金的硬度是否有明显地提高?

备注: 供参考的上分位数的值:

(1) t 分布: $t_{0.95}(23) = 1.72$, $t_{0.975}(23) = 2.07$, $t_{0.975}(25) = 2.06$, $t_{0.95}(15) = 1.71$.

(2) χ^2 分布: $\chi_{0.975}^2(9) = 19.02$, $\chi_{0.025}^2(9) = 2.7$, $\chi_{0.975}^2(10) = 20.48$, $\chi_{0.025}^2(10) = 3.25$

(3) 标准正态分布: $Z_{0.95} = 1.645$, $Z_{0.975} = 1.96$.