安徽师范大学

2021 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 891

科目名称： 高等代数

一、 (15 分) 设$p(x), f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，且$p(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约.

(1) 若存在$\alpha \in \mathbb{R}$，使得$p(\alpha) = f(\alpha) = 0$，则$p(x) \mid f(x)$;

(2) 若$a + \sqrt{b}$(a, b为有理数，$\sqrt{b}$为无理数)为$f(x)$的一个根，则$a - \sqrt{b}$也为$f(x)$的根..

二、 (15 分) 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_2 & x_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & x_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \cdots & a_n & x_n \end{vmatrix}$.

三、 (20 分) 当λ为何值时，方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = (a-1)\lambda + 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = a \end{cases}$有唯一解、有无穷多解、无解？

并在有解时求出解.

四、 (20 分) 用正交的线性替换化二次型$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$为标准形.

五、 (15 分) 设A为n阶方阵，E为n阶单位矩阵，且$A^2 = 2020A$.

(1) 证明：秩(A)+秩$(A - 2020E) = n$;

(2) 若A的秩为$r(>0)$，求$|E + A|$的值.

六、 (20 分) 设$\mathcal{A}$是向量空间V的线性变换，且$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 证明：

(1) $\mathcal{A}$为可逆变换当且仅当$\mathcal{A}$为恒等变换;

(2) $\mathcal{A}$的特征值只能为 0 或 1;

(3) 若V_0, V_1分别是特征值 0,1 的特征子空间，则$V_1 = \mathcal{A}$的值域$\mathcal{A}V$，$V_0 = \mathcal{A}$的核$\mathcal{A}^{-1}(0)$.

七、 (15 分) 设 5 阶λ-矩阵$A(\lambda)$的秩为 4，其初等因子为$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda + 1, (\lambda+1)^2$，求$A(\lambda)$的行列式因子、不变因子及标准形.

八、（15分）设$f(x)$和$p(x)$是数域$\mathbb{Q}$上的多项式，k是正整数.

(1) 证明：若$p(x)$是$(f(x), f'(x))$的k重因式，则$p(x)$是$f(x)$的$k+1$重因式；

(2) 若$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 11x^2 - 8x - 12$，将$f(x)$在有理数范围内因式分解.

九、（15分）设A是n阶非零实反对称矩阵. 证明：

(1) A的特征值只能为0或纯虚数；

(2) 矩阵$T = (E + A)^{-1}(E - A)$为正交矩阵.