

# 安徽师范大学

## 2021 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 601

科目名称: 数学分析

1. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(1 - \cos x) + 2e^{-nx} \cos x}{x^2 + e^{-nx}}$ , 求  $f'(0)$ . (15 分)

2. 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$ , 证明: 当  $p > 1$  时  $\{a_n\}$  收敛; 当  $p \leq 1$  时  $\{a_n\}$  发散. (15 分)

3. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内二阶可导,  $f(x)$  和  $f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 证明:  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界. (15 分)

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

证明: 函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $n+1$  个不同零点. (15 分)

5. 将函数  $f(x) = x(2\pi - x)$ ,  $0 < x < 2\pi$  展开成傅里叶级数并证明:  $\pi^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n^2}$ . (20 分)

6. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 令

$$f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt, x \in [a, b], n = 1, 2, \dots$$

证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛. (15 分)

7. 举一个二元函数  $f(x, y)$  使之满足在某点对每一个自变量都连续, 但在该点不连续, 并予以证明. (10 分)

8. 设  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ ,

(1) 若  $u = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ , 证明:  $\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$  ( $r \neq 0$ ). (10 分)

(2)  $\Delta(r^{2-n}) = 0$  ( $r \neq 0, n \geq 3$ ). (5 分)

9. 利用二重积分证明: 概率积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . (15 分)

10. 设  $D$  为单连通闭区域, 计算  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为  $D$  内任一按段光滑封闭曲线. (15 分)