一．随机事件和概率

1、概率的定义和性质

（1）概率的公理化定义

设Ω为样本空间，A为事件，对每一个事件A都有一个实数 P(A)，若满足下列三个条件：

1° 0≤P(A)≤1，

2° P(Ω) =1

3° 对于两两互不相容的事件A_1，A_2，…有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

常称为可列（完全）可加性。

则称 P(A)为事件A的概率。

（2）古典概型（等可能概型）

1° $\Omega=\{\omega_1,\omega_2 \cdots \omega_n\}$，

2° $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$。

设任一事件A，它是由$\omega_1,\omega_2 \cdots \omega_m$组成的，则有

$P(A)=\{(\omega_1)\cup(\omega_2)\cup\cdots\cup(\omega_m)\}$

$=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_m)$

$$=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

2、五大公式（加法、减法、乘法、全概、贝叶斯）

（1）加法公式

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

当 P(AB)＝0 时，P(A+B)=P(A)+P(B)

（2）减法公式

P(A-B)=P(A)-P(AB)

当 B⊂A 时，P(A-B)=P(A)-P(B)

当 A=Ω时，P($\overline{B}$)=1- P(B)

（3）条件概率和乘法公式

定义 设 A、B 是两个事件，且 P(A)>0，则称$\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为事件 A 发生条件下，事件 B 发生的条件概率，记为$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。

条件概率是概率的一种，所有概率的性质都适合于条件概率。

（4）全概公式

设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$满足

1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$两两互不相容，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，

2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} B_i$，

则有

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$。

此公式即为全概率公式。

（5）贝叶斯公式

设事件B_1，B_2，…，B_n及A满足

1° B_1，B_2，…，B_n两两互不相容，$P(Bi)$>0，$i=1$，2，…，n，

2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} B_i$，$P(A)>0$，

则

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A/B_j)}，i=1，2，\cdots n。$$

此公式即为贝叶斯公式。

$P(B_i)$，（$i=1$，2，…，n），通常叫先验概率。$P(B_i/A)$，（$i=1$，2，…，n），通常称为后验概率。如果我们把A当作观察的"结果"，而B_1，B_2，…，B_n理解为"原因"，则贝叶斯公式反映了"因果"的概率规律，并作出了"由果朔因"的推断。

3、事件的独立性和伯努利试验

（1）两个事件的独立性

设事件A、B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A、B是相互独立的（这个性质不是想当然成立的）。

若事件A、B相互独立，且$P(A)>0$，则有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

所以这与我们所理解的独立性是一致的。

若事件A、B相互独立，则可得到$\overline{A}$与B、A与$\overline{B}$、$\overline{A}$与$\overline{B}$也都相互独立。（证明）

由定义，我们可知必然事件Ω和不可能事件 Ø 与任何事件都相互独立。（证明）

同时，Ø 与任何事件都互斥。

（2）多个事件的独立性

设 ABC 是三个事件，如果满足两两独立的条件，

P(AB)=P(A)P(B)；P(BC)=P(B)P(C)；P(CA)=P(C)P(A)

并且同时满足 P(ABC)=P(A)P(B)P(C)

那么 A、B、C 相互独立。

对于 n 个事件类似。

两两互斥→互相互斥。

两两独立→互相独立？

（3）伯努利试验

定义 我们作了 n 次试验，且满足

- ◆ 每次试验只有两种可能结果，A 发生或 A 不发生；
- ◆ n 次试验是重复进行的，即 A 发生的概率每次均一样；
- ◆ 每次试验是独立的，即每次试验 A 发生与否与其他次试验 A 发生与否是互不影响的。

这种试验称为伯努利概型，或称为 n 重伯努利试验。

用 p 表示每次试验 A 发生的概率，则 $\overline{A}$ 发生的概率为 $1-p=q$，用 $P_n(k)$ 表示 n 重伯努利试验中 A 出现 $k(0\le k\le n)$ 次的概率，

二. 随机变量及其分布

1、随机变量的分布函数

（1）离散型随机变量的分布率

设离散型随机变量 X 的可能取值为 X_k(k=1,2,…)且取各个值的概率，即事件($X=X_k$)的概率为

$P(X=x_k)=p_k$，k=1,2,…，

则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。有时也用分布列的形式给出：

$$\frac{X}{P(X=x_k)}\Big|\frac{x_1,x_2,\Lambda,x_k,\Lambda}{p_1,p_2,\Lambda,p_k,\Lambda}。$$

显然分布律应满足下列条件：

（1）$p_k\ge 0$，$k=1,2,\Lambda$，

（2）$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$。

（2）分布函数

对于非离散型随机变量，通常有 $P(X=x)=0$，不可能用分布率表达。例如日光灯管的寿命 X，$P(X=x_0)=0$。

所以我们考虑用 X 落在某个区间 $(a,b]$ 内的概率表示。

定义 设 X 为随机变量，x 是任意实数，则函数

$F(x)=P(X\le x)$

称为随机变量 X 的分布函数。

$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$ 可以得到 X 落入区间 $(a,b]$ 的概率。也就是说，分布函数完整地描述了随机变量 X 随机取值的统计规律性。

分布函数 $F(x)$ 是一个普通的函数，它表示随机变量落入区间（–∞，x]内的概率。

$F(x)$ 的图形是阶梯图形，x_1,x_2,Λ 是第一类间断点，随机变量 X 在 x_k 处的概率就是 $F(x)$ 在 x_k 处的跃度。

分布函数具有如下性质：

1° $0\le F(x)\le 1,\quad -\infty<x<+\infty$；

2° $F(x)$ 是单调不减的函数，即 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1)\le F(x_2)$；

3° $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

4° $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的；

5° $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$。

（3）连续型随机变量的密度函数

定义 设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$，

则称 X 为连续型随机变量。$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数或密度函数，简称概率密度。$f(x)$ 的图形是一条曲线，称为密度（分布）曲线。

由上式可知，连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数。

所以，

$$P(x_1\le X\le x_2)=P(x_1<X\le x_2)=P(x_1\le X<x_2)=P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

密度函数具有下面 4 个性质：

1° $f(x)\ge 0$。

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$。

$F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 的几何意义；在横轴上面、密度曲线下面的全部面积等于 1。

如果一个函数 $f(x)$ 满足 1°、2°，则它一定是某个随机变量的密度函数。

3° $P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$。

4° 若 $f(x)$ 在 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

$P(x<X\le x+dx)\approx f(x)dx$

它在连续型随机变量理论中所起的作用与 $P(X=x_k)=p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。

$E\to\omega,\Omega\to \quad A \quad \to P(A),$(古典概型，五大公式，独立性)

$X(\omega)\to X(\omega)\le x\to F(x)=P(X\le x)$

对于连续型随机变量 X，虽然有 $P(X=x)=0$，但事件 $(X=x)$ 并非是不可能事件 Ø。

$P(X=x)\le P(x<X\le x+h)=\int_{x}^{x+h} f(x)dx$

令 $h\to 0$，则右端为零，而概率 $P(X=x)\ge 0$，故得 $P(X=x)=0$。

不可能事件（Ø）的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件（Ω）的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

2、常见分布

①0－1 分布

P(X=1)=p, P(X=0)=q

②二项分布

在 n 重贝努里试验中，设事件 A 发生的概率为 p。事件 A 发生的次数是随机变量，设为 X，则 X 可能取值为 $0,1,2,\Lambda,n$。

$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，其中 $q=1-p, 0<p<1, k=0,1,2,\Lambda,n$，

则称随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布。记为 $X\sim B(n,p)$。

$$\frac{X}{P(X=k)}\bigg|\frac{}{q^n, npq^{n-1}, C_n^2 p^2 q^{n-2}, \Lambda, C_n^k p^k q^{n-k}, \Lambda, p^n}$$

容易验证，满足离散型分布率的条件。

当 $n=1$ 时，$P(X=k)=p^k q^{1-k}$，$k=0.1$，这就是（0-1）分布，所以（0-1）分布是二项分布的特例。

③泊松分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\quad k=0,1,2\Lambda,$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim\pi(\lambda)$ 或者 P(λ)。

泊松分布为二项分布的极限分布（np=λ，n→∞）。

④超几何分布

$$P(X=k)=\frac{C_M^k \bullet C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad \begin{array}{l} k=0,1,2\Lambda, l \\ l=\min(M,n) \end{array}$$

随机变量 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布。

⑤几何分布

$P(X=k)=q^{k-1}p, k=1,2,3,\Lambda$，其中 p≥0，q=1-p。

随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。

⑥均匀分布

设随机变量 X 的值只落在[a，b]内，其密度函数 $f(x)$ 在[a，b]上为常数 k，即

$$f(x)=\begin{cases} k, & a\le x\le b \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中 k=$\frac{1}{b-a}$，

则称随机变量 X 在[a，b]上服从均匀分布，记为 X~U(a, b)。

分布函数为

$$\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \end{cases}$$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=$

1，　　　　　　x>b。

当 a≤x_1<x_2≤b 时，X 落在区间（x_1,x_2）内的概率为

P（$x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x_2-x_1}{b-a}$。

⑦指数分布

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$，则称随机变量 X 服从参数为λ的指数分布。X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}$$

记住几个积分：

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=1,\qquad \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx=2,$$

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx=(n-1)!$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\qquad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

⑧正态分布

设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

其中μ、$\sigma>0$为常数，则称随机变量X服从参数为μ、σ的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

$f(x)$具有如下性质：

1°　$f(x)$的图形是关于$x=\mu$对称的；

2°　当$x=\mu$时，$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$为最大值；

3°　$f(x)$以ox轴为渐近线。

特别当σ固定、改变μ时，$f(x)$的图形形状不变，只是集体沿ox轴平行移动，所以μ又称为位置参数。当μ固定、改变σ时，$f(x)$的图形形状要发生变化，随σ变大，$f(x)$图形的形状变得平坦，所以又称σ为形状参数。

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则X的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

。。

参数$\mu=0$、$\sigma=1$时的正态分布称为标准正态分布，记为$X\sim N(0,1)$，其密度函数记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

分布函数为

$\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。$\Phi(x)$是不可求积函数，其函数值，已编制成表可供查用。

φ(x)和 Φ(x)的性质如下：

1°　φ(x)是偶函数，φ(x)＝φ(−x)；

2°　当 x=0 时，φ(x)＝$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$为最大值；

3°　Φ(−x)＝1−Φ(x)且 Φ(0)＝$\frac{1}{2}$。

如果$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

所以我们可以通过变换将$F(x)$的计算转化为$\Phi(x)$的计算，而$\Phi(x)$的值是可以通过查表得到的。

$$P(x_1<X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)。$$

分位数的定义

3、随机变量函数的分布

随机变量Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$，若X的分布函数$F_X(x)$或密度函数$f_X(x)$知道，则如何求出$Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)$或密度函数$f_Y(y)$。

（1）X是离散型随机变量

已知X的分布列为

X	$x_1,\ x_2,\ \Lambda,\ x_n,\ \Lambda$
$P(X=x_i)$	$p_1,\ p_2,\ \Lambda,\ p_n,\ \Lambda$

，

显然，$Y=g(X)$的取值只可能是$g(x_1),g(x_2),\Lambda,g(x_n),\Lambda$，若$g(x_i)$互不相等，则$Y$的分布列如下：

Y	$g(x_1),\ g(x_2),\ \Lambda,\ g(x_n),\ \Lambda$
$P(Y=y_i)$	$p_1,\ p_2,\ \Lambda,\ p_n,\ \Lambda$

，

若有某些 $g(x_i)$ 相等，则应将对应的 P_i 相加作为 $g(x_i)$ 的概率。

（2） X 是连续型随机变量

先利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 写出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，再利用变上下限积分的求导公式求出 $f_Y(y)$。

三. 二维随机变量及其分布

1、二维随机变量的基本概念

（1）二维连续型随机向量联合分布密度及边缘分布

对于二维随机向量 $\xi=(X,Y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，使对任意一个其邻边分别平行于坐标轴的矩形区域 D，即 D={(X,Y)|a<x<b,c<y<d}有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,$$

则称 ξ 为连续型随机向量；并称 f(x,y)为 ξ =（X，Y）的分布密度或称为 X 和 Y 的联合分布密度。

分布密度 f(x,y)具有下面两个性质：

（1） f(x,y)≥0;

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$

一般来说，当（X，Y）为连续型随机向量，并且其联合分布密度为 f(x,y)，则 X 和 Y 的边缘分布密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

注意：联合概率分布→边缘分布

（2）条件分布

当（X，Y）为离散型，并且其联合分布律为

$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij}(i,j=1,2,\Lambda),$$

在已知 $X=x_i$ 的条件下，Y 取值的条件分布为

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $p_{i\cdot}$, $p_{\cdot j}$ 分别为 X，Y 的边缘分布。

当(X,Y)为连续型随机向量,并且其联合分布密度为 f(x,y)，则在已知 Y=y 的条件下，X 的条件分布密度为

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

在已知 X=x 的条件下，Y 的条件分布密度为

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

其中 $f_X(x)>0, f_Y(y)>0$ 分别为 X，Y 的边缘分布密度。

（3）常见的二维分布

①均匀分布

设随机向量（X，Y）的分布密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积，则称（X，Y）服从 D 上的均匀分布，记为（X，Y）～U（D）。

②正态分布

设随机向量（X，Y）的分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，共 5 个参数，则称（X，Y）服从二维正态分布，

记为（X，Y）～N（$\mu_1,\mu_{2,}\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$

由边缘密度的计算公式，可以推出二维正态分布的两个边缘分布仍为正态分布，反推则错。

即 X～N（$\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_{2,}\sigma_2^2).$

（5）二维随机向量联合分布函数及其性质

设（X，Y）为二维随机变量，对于任意实数 x,y,二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机向量（X，Y）的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

分布函数是一个以全平面为其定义域，以事件 $\{(\omega_1,\omega_2)\mid-\infty<X(\omega_1)\le x,-\infty<Y(\omega_2)\le y\}$ 的概率为函数值的一个实值函数。分布函数 F(x,y)具有以下的基本性质：

（1）$0\le F(x,y)\le 1;$

（2）F（x,y）分别对 x 和 y 是非减的，即
当 $x_2>x_1$ 时，有 $F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；当 $y_2>y_1$ 时，有 $F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$；
（3）F（x,y）分别对 x 和 y 是右连续的，即

$$F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0);$$

（4）

$$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1.$$

2、随机变量的独立性

（1）连续型随机变量

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

联合分布→边缘分布→$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

直接判断，充要条件：
①可分离变量
②正概率密度区间为矩形

（2）二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

$\rho=0$

（3）随机变量函数的独立性

若 X 与 Y 独立，h,g 为连续函数，则：h（X）和 g（Y）独立。

四. 随机变量的数字特征

（1）一维随机变量及其函数的期望

①设 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P(X=x_k)=p_k$，

k=1,2,…,n，

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k$$

期望就是平均值。

②设 X 是连续型随机变量，其概率密度为 f(x)，

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

③数学期望的性质

（1） E(C)=C

（2） E(CX)=CE(X)

（3） E(X+Y)=E(X)+E(Y)，$E(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i)$

（4） E(XY)=E(X) E(Y)，充分条件：X 和 Y 独立；
充要条件：X 和 Y 不相关。

（5） Y=g(X)

离散：$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}g(x_k)p_k$

连续：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

（2）方差

$D(X)=E[X-E(X)]^2$，方差

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$，标准差

①离散型随机变量

$$D(X)=\sum_k[x_k-E(X)]^2p_k$$

②连续型随机变量

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx$$

③方差的性质

（1） D(C)=0；E(C)=C

（2） $D(aX)=a^2D(X)$； E(aX)=aE(X)

（3） $D(aX+b)=a^2D(X)$； E(aX+b)=aE(X)+b

（4） $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

（5） D(X+Y)=D(X)+D(Y)，充分条件：X 和 Y 独立；
充要条件：X 和 Y 不相关。

D(X±Y)=D(X)+D(Y)±2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]，无条件成立。

E(X+Y)=E(X)+E(Y)，无条件成立。

（3）常见分布的数学期望和方差

分布名称	符号	均值	方差
0-1 分布	$B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

超几何分布	$H(n,M,N)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
均匀分布	$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$e(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

①0－1 分布

X	0	1
	q	p

E(X)=p，D(X)=pq

②二项分布　X~B(n,p)，$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，（k=0,1,2…n）

E(X)=np，D(X)=npq

③泊松分布　P(λ)　P(X=k)=$\frac{\lambda^k e^{-x}}{k!}$，k=0,1,2…

E(X)= λ，　D(X)= λ

④超几何分布　$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

E(X)=$\frac{nM}{N}$

⑤几何分布　$P(X=k)=pq^{k-1}$，k=0,1,2…

E(X)=$\frac{1}{p}$，　D(X)=$\frac{q}{p^2}$

⑥均匀分布　X~U[a,b]，f(x)=$\frac{1}{b-a}$，[a, b]

E(X)=$\frac{a+b}{2}$，　D(X)=$\frac{(b-a)^2}{12}$

⑦指数分布　f(x)= $\lambda e^{-\lambda x}$，(x>0)

E(X)=$\frac{1}{\lambda}$，　D(X)=$\frac{1}{\lambda^2}$

⑧正态分布　X~N(μ，σ²)，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

E(X)= μ，　D(X)= σ²

2、二维随机变量的数字特征

（1）协方差和相关系数

对于随机变量 X 与 Y，称它们的二阶混合中心矩μ_{11}为 X 与 Y 的协方差或相关矩，记为σ_{XY}或$\operatorname{cov}(X,Y)$，即

$$\sigma_{XY}=\mu_{11}=E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

与记号σ_{XY}相对应，X 与 Y 的方差 D（X）与 D（Y）也可分别记为σ_{XX}与σ_{YY}。

协方差有下面几个性质：

(i)　cov (X, Y)=cov (Y, X);

(ii)　cov(aX,bY)=ab cov(X,Y);

(iii)　cov(X_1+X_2, Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y);

(iv)　cov(X,Y)=E(XY)-(E(X))(E(Y)).

对于随机变量 X 与 Y，如果 D（X）>0, D(Y)>0，则称

$$\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数，记作ρ_{XY}（有时可简记为ρ）。

|ρ|≤1，当|ρ|=1 时，称 X 与 Y 安全相关：

$$完全相关\begin{cases}正相关，当\rho=1时，\\负相关，当\rho=-1时，\end{cases}$$

而当$\rho=0$时，称 X 与 Y 不相关。

与相关系数有关的几个重要结论

（i）　若随机变量 X 与 Y 相互独立，则$\rho_{XY}=0$；反之不真。

（ii）　若（X，Y）～N（$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$），则 X 与 Y 相互独立的充要条件是$\rho=0$，即 X 和 Y 不相关。

（iii）　以下五个命题是等价的：

①$\rho_{XY}=0$；

②cov(X,Y)=0;

③E(XY)=E(X)E(Y);
④D(X+Y)=D(X)+D(Y);
⑤D(X-Y)=D(X)+D(Y).

（2）二维随机变量函数的期望

$$E[G(X,Y)]=\begin{cases}\sum_i\sum_j G(x_i,y_j)p_{ij},(X,Y)\text{为离散型；}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)dxdy,(X,Y)\text{为连续型。}\end{cases}$$

（3）原点矩和中心矩

①对于正整数k，称随机变量X的k次幂的数学期望为X的k阶原点矩，记为v_k,即

$u_k=E(X^k)$, k=1,2, ….

于是，我们有

$$u_k=\begin{cases}\sum_i x_i^k p_i & \text{当}X\text{为离散型时，}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}x^k p(x)dx, & \text{当}X\text{为连续型时.}\end{cases}$$

②对于正整数k，称随机变量X与E（X）差的k次幂的数学期望为X的k阶中心矩，记为μ_k，即

$$\mu_k=E(X-E(X))^k,k=1,2,\Lambda .$$

于是，我们有

$$u_k=\begin{cases}\sum_i (x_i-E(X))^k p_i & \text{当}X\text{为离散型时，}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k p(x)dx, & \text{当}X\text{为连续型时.}\end{cases}$$

③对于随机变量X与Y，如果有$E(X^kY^l)$存在，则称之为X与Y的$k+l$阶混合原点矩，记为u_{kl}，即

$$u_{kl}=E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))].$$

五. 大数定律和中心极限定理

1、切比雪夫不等式

设随机变量X具有数学期望E（X）=μ，方差D（X）=σ^2，则对于任意正数ε，有下列切比雪夫不等式

$$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式给出了在未知X的分布的情况下，对概率

$$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)$$

的一种估计，它在理论上有重要意义。

2、大数定律

（1）切比雪夫大数定律

（要求方差有界）

设随机变量X_1，X_2，…相互独立，均具有有限方差，且被同一常数C所界：D（X_i）<C(i=1,2,…),则对于任意的正数ε，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

特殊情形：若X_1，X_2，…具有相同的数学期望E（X_I）=μ，则上式成为

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\mu\right|<\varepsilon\right)=1.$$

或者简写成：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right)=1.$$

切比雪夫大数定律指出，n个相互独立，且具有有限的相同的数学期望与方差的随机变量，当n很大时，它们的算术平均以很大的概率接近它们的数学期望。

（2）伯努利大数定律

设μ是n次独立试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数ε，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

伯努利大数定律说明，当试验次数n很大时，事件A发生的频率与概率有较大判别的可能性很小，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right)=0.$$

这就以严格的数学形式描述了频率的稳定性。

（3）辛钦大数定律

（不要求存在方差）

设X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，且E（X_n）=μ，则对于任意的正数ε有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\mu\right|<\varepsilon\right)=1.$$

3、中心极限定理

（1）列维－林德伯格定理

设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2 \neq 0(k=1,2,\Lambda)$，则随机变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对任意的实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

或者简写成：$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$

此定理也称为**独立同分布**的中心极限定理。

（2）棣莫弗－拉普拉斯定理

设随机变量 X_1，…X_n 均为具有参数 n，p(0<p<1)的二项分布，则对于任意实数 x，有

$$=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

4、二项定理和泊松定理

（1）二项定理

若当 $N\to\infty$时$,\frac{M}{N}\to p(n,k$不变$)$，则

$$\frac{C_M^K C_{N-M}^{n-k}}{C_N^N}\to C_n^k P^k(1-p)^{n-k} \qquad (N\to\infty).$$

可见，超几何分布的极限分布为二项分布。

（2）泊松定理

若当 $n\to\infty$时$,np\to\lambda>0$，则

$$C_n^k P^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (n\to\infty).$$

其中 k=0，1，2，…，n，…。

六. 数理统计的基本概念

1、总体、个体和样本

（1）总体与样本

总体　　　在数理统计中，常把被考察对象的某一个（或多个）指标的全体称为总体（或母体）；而把总体中的每一个单元称为样品（或个体）。在以后的讨论中，我们总是把总体看成一个具有分布的随机变量（或随机向量）。

（2）样本函数与统计量

设 x_1,x_2,Λ,x_n 为总体的一个样本，称

$$\varphi=\varphi \quad (x_1,x_2,\Lambda,x_n)$$

为样本函数，其中 φ 为一个连续函数。如果 φ 中不包含任何未知参数，则称 φ（x_1,x_2,Λ,x_n）为一个统计量。

2、统计量

（1）常用统计量

样本均值　　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$

样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

（与概率论中的方差定义不同）

样本标准差　　$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$

样本 k 阶原点矩　　$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k, k=1,2,\Lambda.$

样本 k 阶中心矩

$$M'_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k, k=2,3,\Lambda.$$

（二阶中心矩 $S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 与概率论中的方差定义相同）

（2）统计量的期望和方差

$E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，

$E(S^2)=\sigma^2$，$E(S^{*2})=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$，

其中 $S^{*2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，为二阶中心矩。

3、三个抽样分布（χ²、t、F 分布）

（1）χ²分布

设 n 个随机变量 X_1, X_2, Λ, X_n 相互独立，且服从**标准正态分布**，可以证明：它们的平方和

$$W=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

的分布密度为

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}} & u\ge 0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

我们称随机变量 W 服从自由度为 n 的 κ^2 分布，记为 W～

κ^2(n)，其中

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x}dx.$$

所谓自由度是指独立正态随机变量的个数，它是随机变量分布中的一个重要参数。

κ^2 分布满足可加性：设

$$Y_i \ -\kappa^2(n_i),$$

则

$$Z=\sum_{i=1}^{k}Y_i\sim\kappa^2(n_1+n_2+\Lambda+n_k).$$

注意两个结果：E(χ²)=n，D(χ²)=2n

（2）t 分布

设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且

$$X\sim N(0,1), Y\sim\kappa^2(n),$$

可以证明：函数

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

的概率密度为

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (-\infty<t<+\infty).$$

我们称随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 T～t(n)。

注意两个结果：E(T)=0，D(T)=$\dfrac{n}{n-2}$ (n>2)

（3）F 分布

设 $X\sim\kappa^2(n_1), Y\sim\kappa^2(n_2)$，且 X 与 Y 独立，可以证明：

$F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 的概率密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \\ 0,\end{cases}$$

我们称随机变量 F 服从第一个自由度为 n_1，第二个自由度为 n_2 的 F 分布，记为 F～f(n_1, n_2).

正态分布 $\mu_{1-\alpha}=-\mu_\alpha$，

$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$，

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

4、正态总体下统计量的分布和性质

注意一个定理：$\overline{X}$ 与 S^2 独立。

（1）正态分布　　设 x_1, x_2, Λ, x_n 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数

$$u\overset{def}{=}\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

（2）t–分布　　设 x_1, x_2, Λ, x_n 为来自正态总体

$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数

$$t \overset{def}{=\!=} \frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

其中 t(n-1)表示自由度为 n-1 的 t 分布。

（3）κ^2 分布　　设 $x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数

$$w \overset{def}{=\!=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \kappa^2(n-1),$$

其中$\kappa^2(n-1)$表示自由度为 n-1 的κ^2分布。

（4）F 分布　设 $x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，而 $y_1,y_2,\Lambda\ ,y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma_2^2)$的一个样本，则样本函数

$$F \overset{def}{=\!=} \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1),$$

其中

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x})^2, \qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\overline{y})^2;$$

$F(n_1-1,n_2-1)$表示第一自由度为n_1-1，第二自由度为 n_2-1的 F 分布。

七. 参数估计

1、点估计的两种方法

（1）矩法

所谓矩法就是利用样本各阶原点矩与相应的总体矩，来建立估计量应满足的方程，从而求得未知参数估计量的方法。

设总体 X 的分布中包含有未知数$\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m$，则其分布函数可以表成$F(x;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$. 显示它的 k 阶原点矩 $v_k=E(X^k)(k=1,2,\Lambda\ ,m)$ 中也包含了未知参数 $\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m$，即 $v_k=v_k(\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$。又设 $x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n$为总体 X 的 n 个样本值，其样本的 k 阶原点矩为

$$\hat{v}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k \qquad (k=1,2,\Lambda\ ,m).$$

这样，我们按照“当参数等于其估计量时，总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程，即有

$$\begin{cases} v_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, \\ v_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2, \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ v_m(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^m. \end{cases}$$

由上面的 m 个方程中，解出的 m 个未知参数$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m)$即为参数（$\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m$）的矩估计量。

（2）最大似然法

所谓最大似然法就是当我们用样本的函数值估计总体参数时，应使得当参数取这些值时，所观测到的样本出现的概率为最大。

当总体 X 为连续型随机变量时，设其分布密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$，其中$\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m$为未知参数。又设$x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n$为总体的一个样本，称

$$L_n(\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$$

为样本的似然函数，简记为 L_n.

当总体 X 为离型随机变量时，设其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$，则称

$$L(x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$$

为样本的似然函数。

若似然函数 $L(x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n;\theta_1,\theta_2,\Lambda\ ,\theta_m)$ 在 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m$处取到最大值，则称$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda\ ,\hat{\theta}_m$分别为

$\theta_1,\theta_2,\Lambda,\theta_m$ 的最大似然估计值，相应的统计量称为最大似然估计量。我们把使 L_n 达到最大的 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\Lambda,\hat{\theta}_m$ 分别作为 $\theta_1,\theta_2,\Lambda,\theta_m$ 的估计量的方法称为最大似然估计法。

由于 ln$x$ 是一个递增函数，所以 L_n 与 lnL_n 同时达到最大值。我们称

$$\left.\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}=0, i=1,2,\Lambda,m$$

为似然方程。由多元微分学可知，由似然方程可以求出 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\Lambda,x_n)(i=1,2,\Lambda,m)$ 为 θ_i 的最大似然估计量。

容易看出，使得 L_n 达到最大的 $\hat{\theta}_i$ 也可以使这组样本值出现的可能性最大。

2、估计量的评选标准

（1）无偏性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$ 为求知参数 θ 的估计量。若 E（$\hat{\theta}$）=θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

若总体 X 的均值 E（X）和方差 D（X）存在，则样本均值 $\bar{x}$ 和样本方差 S^2 分别为 E（X）和 D（X）的无偏估计，即

E（$\bar{x}$）=E（X），E（S^2）=D（X）。

（2）有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量。若 $D(\hat{\theta}_1)<D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

（3）一致性（相合性）

设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一串估计量，如果对于任意的正数 ε，都有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)=0,$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量（或相合估计量）。

3、区间估计

（1）置信区间和置信度

设总体 X 含有一个待估的未知参数 θ。如果我们从样本 x_1,x_2,Λ,x_n 出发，找出两个统计量 $\theta_1=\theta_1(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$ 与 $\theta_2=\theta_2(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$ $(\theta_1<\theta_2)$，使得区间 $[\theta_1,\theta_2]$ 以 $1-\alpha(0<\alpha<1)$ 的概率包含这个待估参数 θ，即

$$P\{\theta_1\le\theta\le\theta_2\}=1-\alpha,$$

那么称区间 $[\theta_1,\theta_2]$ 为 θ 的置信区间，$1-\alpha$ 为该区间的置信度（或置信水平）。

（2）单正态总体的期望和方差的区间估计

设 x_1,x_2,Λ,x_n 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，在置信度为 $1-\alpha$ 下，我们来确定 μ 和 σ^2 的置信区间 $[\theta_1,\theta_2]$。具体步骤如下：

（i）选择样本函数；

（ii）由置信度 $1-\alpha$，查表找分位数；

（iii）导出置信区间 $[\theta_1,\theta_2]$。

下面分三种情况来讨论。

① 已知方差，估计均值

（i）选择样本函数

设方差 $\sigma^2=\sigma_0^2$，其中 σ_0^2 为已知数。我们知道 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是 μ 的一个点估计，并且知道包含未知参数 μ 的样本函数。

$$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

(ii) 查表找分位数

对于给定的置信度 $1-\alpha$，查正态分布分位数表，找出分位数 λ，使得

$$P(|u|\le\lambda)=1-\alpha。$$

即

$$P\left(-\lambda \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_2/\sqrt{n}} \le \lambda\right)=1-\alpha.$$

（iii）导出置信区间

由不等式

$$-\lambda \le \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_2} \le \lambda$$

推得

$$\bar{x}-\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

这就是说，随机区间

$$\left[\bar{x}-\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

以$1-\alpha$的概率包含μ。

② 未知方差，估计均值

（i）选择样本函数

设x_1, x_2, Λ, x_n为总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，由于σ^2是未知的，不能再选取样本函数 u。这时可用样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

来代替σ^2，而选取样本函数

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

(ii)查表找分位数

对于给定的置信度$1-\alpha$，查 t 分位数表，找出分位数λ，使得

$$P(|u| \le \lambda)=1-\alpha。$$

即

$$P\left(-\lambda \le \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le \lambda\right)=1-\alpha.$$

（iii）导出置信区间

由不等式

$$-\lambda \le \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_2} \le \lambda$$

推得

$$\bar{x}-\lambda\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\lambda\frac{S}{\sqrt{n}},$$

这就是说，随机区间

$$\left[\bar{x}-\lambda\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\lambda\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

以$1-\alpha$的概率包含μ。

③ 方差的区间估计

（i）选择样本函数

设x_1, x_2, Λ, x_n为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，我们知道$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$是$\sigma^2$的一个点估计，并且知道包含未知参数$\sigma^2$的样本函数

$$\omega=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \kappa^2(n-1).$$

（ii）查表找分位数

对于给定的置信度$1-\alpha$，查κ^2分布分位数表，找出两个分位数λ_1与λ_2，使得由于κ^2分布不具有对称性，因此通常采取使得概率对称的区间，即

$$P(\lambda_1 \le \omega \le \lambda_2)=1-\alpha.$$

于是有

$$P\left(\lambda_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \lambda_2\right)=1-\alpha.$$

（iii）导出置信区间

$$\lambda_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \lambda_2$$

由不等式

$$\frac{(n-1)S^2}{\lambda_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\lambda_1}$$

以$1-\alpha$的概率包含σ^2，而随机区间

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\lambda_2}}S, \sqrt{\frac{n-1}{\lambda_1}}S\right]$$

以$1-\alpha$的概率包含σ。

一．函数的概念

1．用变上、下限积分表示的函数

（1）$y=\int_0^x f(t)dt$，其中 $f(t)$ 连续，则 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$

（2）$y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 可导，$f(t)$ 连续，

则 $\dfrac{dy}{dx}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

2．两个无穷小的比较

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

（1）$l=0$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记以 $f(x)=0[g(x)]$，称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小。

（2）$l\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小。

（3）$l=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记以 $f(x)\sim g(x)$

3．常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

二．求极限的方法

1．利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2．两个准则

准则 1．单调有界数列极限一定存在

（1）若 $x_{n+1}\le x_n$（n 为正整数）又 $x_n\ge m$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\ge m$

（2）若 $x_{n+1}\ge x_n$（n 为正整数）又 $x_n\le M$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\le M$

准则 2．（夹逼定理）设 $g(x)\le f(x)\le h(x)$

若 $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$

3．两个重要公式

公式 1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

公式 2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$；$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e$；$\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e$

4．用无穷小重要性质和等价无穷小代换

5．用泰勒公式（比用等价无穷小更深刻）（数学一和数学二）

当 $x\to 0$ 时，$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\Lambda+\dfrac{x^n}{n!}+0(x^n)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\Lambda+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\Lambda+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\Lambda+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+0(x^n)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\Lambda+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+0(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\Lambda+\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+0(x^n)$$

6．洛必达法则

法则 1．（$\dfrac{0}{0}$ 型）设（1）$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$

（2）x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）

（注：如果 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形，则不能得出 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形）

法则 2．（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）设（1）$\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$

（2）x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在

（3）$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或$\infty$）

则$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$（或$\infty$）

7．利用导数定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ [如果存在]

8．利用定积分定义求极限

基本公式 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$ [如果存在]

三．函数的间断点的分类

函数的间断点分为两类：

（1）第一类间断点

设x_0是函数$y = f(x)$的间断点。如果$f(x)$在间断点x_0处的左、右极限都存在，则称x_0是$f(x)$的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

（2）第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

四．闭区间上连续函数的性质

在闭区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，有以下几个基本性质。这些性质以后都要用到。

定理 1.（有界定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$必在$[a,b]$上有界。

定理 2.（最大值和最小值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在这个区间上一定存在最大值M和最小值m。

其中最大值M和最小值m的定义如下：

定义　设$f(x_0) = M$是区间$[a,b]$上某点x_0处的函数值，如果对于区间$[a,b]$上的任一点x，总有$f(x) \le M$，则称M为函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值。同样可以定义最小值m。

定理 3.（介值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且其最大值和最小值分别为M和m，则对于介于m和M之间的任何实数c，在$[a,b]$上至少存在一个ξ，使得

$$f(\xi) = c$$

推论：如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一个点ξ，使得

$$f(\xi) = 0$$

这个推论也称为零点定理

五．导数与微分计算

1．导数与微分表

$(c)' = 0 \qquad d(c) = 0$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$实常数）$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$（$\alpha$实常数）

$(\sin x)' = \cos x \qquad d\sin x = \cos x dx$

$(\cos x)' = -\sin x \qquad d\cos x = -\sin x dx$

$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad d\tan x = \sec^2 x dx$

$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad d\cot x = -\csc^2 x dx$

$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad d\sec x = \sec x \tan x dx$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x \qquad d\csc x = -\csc x \cot x dx$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\ (a > 0, a \ne 1)$

$d\log_a x = \frac{dx}{x\ln a}\ (a > 0, a \ne 1)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad d\ln x = \frac{1}{x}dx$

$(a^x)' = a^x \ln a\ (a > 0, a \ne 1)$

$da^x = a^x \ln a dx\ (a > 0, a \ne 1)$

$(e^x)' = e^x \qquad de^x = e^x dx$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad d\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \qquad darc\cot x = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$d\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

2．四则运算法则

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$

3．复合函数运算法则

设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

对应地 $dy = f'(u)du = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

由于公式 $dy = f'(u)du$ 不管 u 是自变量或中间变量都成立。因此称为一阶微分形式不变性。

4．由参数方程确定函数的运算法则

设 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ 确定函数 $y = y(x)$，其中 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 存在，且 $\varphi'(t) \neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (\varphi'(t) \neq 0)$$

二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

5．反函数求导法则

设 $y = f(x)$ 的反函数 $x = g(y)$，两者皆可导，且 $f'(x) \neq 0$

则 $\qquad g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'[g(y)]} \qquad (f'(x) \neq 0)$

二阶导数 $g''(y) = \dfrac{d[g'(y)]}{dy} = \dfrac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} = -\frac{f''[g(y)]}{\{f'[g(y)]\}^3} \qquad (f'(x) \neq 0)$$

6．隐函数运算法则

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定，求 y' 的方法如下：

把 $F(x, y) = 0$ 两边的各项对 x 求导，把 y 看作中间变量，用复合函数求导公式计算，然后再解出 y' 的表达式（允许出现 y 变量）

7．对数求导法则

先对所给函数式的两边取对数，然后再用隐函数求导方法得出导数 y'。

对数求导法主要用于：

①幂指函数求导数

②多个函数连乘除或开方求导数

关于幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 常用的一种方法

$y=e^{g(x)\ln f(x)}$ 这样就可以直接用复合函数运算法则进行。

8．可微与可导的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导。

9．求 n 阶导数（$n\geq 2$，正整数）

先求出 y', y'', Λ，总结出规律性，然后写出 $y^{(n)}$，最后用归纳法证明。

有一些常用的初等函数的 n 阶导数公式

（1）$y=e^x \qquad y^{(n)}=e^x$

（2）$y=a^x(a>0, a\neq 1) \qquad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

（3）$y=\sin x \qquad y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

（4）$y=\cos x \qquad y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(5) $y=\ln x \qquad y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

两个函数乘积的 n 阶导数有莱布尼兹公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，$u^{(0)}(x)=u(x)$，$v^{(0)}(x)=v(x)$

假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 n 阶可导。

微分中值定理

一．罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）$f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

二．拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

或写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad (a<\xi<b)$

有时也写成 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ $(0<\theta<1)$

这里 x_0 相当 a 或 b 都可以，Δx 可正可负。

推论 1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数。

推论 2．若 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内皆可导，且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x)=g(x)+c$，其中 c 为一个常数。

三．柯西中值定理（数学四不要）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续；

（2）在开区间 (a,b) 内皆可导；且 $g'(x)\neq 0$

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (a<\xi<b)$$

（注：柯西中值定理为拉格朗日中值定理的推广，特殊情形 $g(x)=x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。）

四．泰勒定理（泰勒公式）（数学一和数学二）

定理 1.（皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则有公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\Lambda+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$(x \to x_0)$

其中 $R_n(x)=0\left[(x-x_0)^n\right] \quad (x \to x_0)$ 称为皮亚诺余项。

$$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0\right)$$

前面求极限方法中用泰勒公式就是这种情形，根据不同情形取适当的 n，所以对常用的初等函数如 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$（α 为实常数）等的 n 阶泰勒公式都要熟记。

定理 2（拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，则对 $x\in[a,b]$，有公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\Lambda+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$ 在 x_0 与 x 之间）

称为拉格朗日余项。

上面展开式称为以 x_0 为中心的 n 阶泰勒公式。当 $x_0=0$ 时，也称为 n 阶麦克劳林公式。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，那么泰勒公式就转化为泰勒级数，这在后面无穷级数中再讨论。

导数的应用：

一．基本知识

1．定义

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的某一点，则

如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x\neq x_0)$，总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点；

如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x\neq x_0)$，总有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极小值点。

函数的极大值与极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

2．必要条件（可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点，则 $f'(x_0)=0$。

我们称 x 满足 $f'(x_0)=0$ 的 x_0 为 $f(x)$ 的驻点可导函数的极值点一定是驻点，反之不然。

极值点只能是驻点或不可导点，所以只要从这两种点中进一步去判断。

3．第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内可导，$f'(x_0)$ 不存在，或 $f'(x_0)=0$。

1° 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x)>0$，而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；

2° 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x)<0$，而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点；

3° 如果在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，$f'(x)$ 的符号相同，那么 $f(x_0)$ 不是极值，x_0 不是极值点。

4．第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点。

当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点。

二．函数的最大值和最小值

1．求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值的方法

首先，求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有驻点和不可导点 x_1,Λ,x_k，其次计算 $f(x_1),\Lambda,f(x_k),f(a),f(b)$。

最后，比较 $f(x_1),\Lambda,f(x_k),f(a),f(b)$，

其中最大者就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M；其中最小者就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m。

2．最大（小）值的应用问题

首先要列出应用问题中的目标函数及其考虑的区间，然后再求出目标函数在区间内的最大（小）值。

三．凹凸性与拐点

1．凹凸的定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对任意不同的两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\right)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸（凹）的。

在几何上，曲线 $y=f(x)$ 上任意两点的割线在曲线下（上）面，则 $y=f(x)$ 是凸（凹）的。

如果曲线 $y=f(x)$ 有切线的话，每一点的切线都在曲线之上（下）则 $y=f(x)$ 是凸（凹）的。

2．拐点的定义

曲线上凹与凸的分界点，称为曲线的拐点。

3．凹凸性的判别和拐点的求法

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$，

如果在 (a,b) 内的每一点 x，恒有 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的；

如果在 (a,b) 内的每一点 x，恒有 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

求曲线 $y=f(x)$ 的拐点的方法步骤是：

第一步：求出二阶导数 $f''(x)$；

第二步：求出使二阶导数等于零或二阶导数不存在的点 x_1、x_2、…、x_k；

第三步：对于以上的连续点，检验各点两边二阶导数的符号，如果符号不同，该点就是拐点的横坐标；

第四步：求出拐点的纵坐标。

四．渐近线的求法

1．垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$

则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线。

2．水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$

则 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。

3．斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$

则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

五．曲率（数学一和数学二）

设曲线 $y=f(x)$，它在点 $M(x,y)$ 处的曲率 $k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$，若 $k\neq0$，则称 $R=\frac{1}{k}$ 为点 $M(x,y)$ 处的曲率半径，在 M 点的法线上，凹向这一边取一点 D，使 $|MD|=R$，则称 D 为曲率中心，以 D 为圆心，R 为半径的圆周称为曲率圆。

不定积分

一．基本积分公式

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \qquad (\alpha\neq-1,\ 实常数)$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

7. $\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

8. $\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$

9. $\int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$

10. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

11. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

13. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad (a > 0)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (a > 0)$

二．换元积分法和分部积分法

1．第一换元积分法（凑微分法）

设 $\int f(u)du = F(u) + C$，又 $\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \xlongequal{令u=\varphi(x)} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

这里要求读者对常用的微分公式要“倒背如流”，也就是非常熟练地凑出微分。

常用的几种凑微分形式：

（1）$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$ $(a \neq 0)$

（2）$\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$ $(a \neq 0, n \neq 0)$

（3）$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d(\ln x)$

（4）$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)$

（5）$\int f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

（6）$\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)d(a^x)$ $(a > 0, a \neq 1)$

$\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)d(e^x)$

（7）$\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x)$

（8）$\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$

（9）$\int f(\tan x)\sec^2 x dx = \int f(\tan x)d(\tan x)$

（10）$\int f(\cot x)\csc^2 x dx = -\int f(\cot x)d(\cot x)$

（11）$\int f(\sec x)\sec x \tan x dx = \int f(\sec x)d(\sec x)$

（12）$\int f(\csc x)\csc x \cot x dx = -\int f(\csc x)d(\csc x)$

（13）$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

（14）$\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int f(\arccos x)d(\arccos x)$

（15）$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$

（16）$\int \frac{f(arc\cot x)}{1+x^2}dx = -\int f(arc\cot x)d(arc\cot x)$

（17）$\int \frac{f\left(\arctan \frac{1}{x}\right)}{1+x^2}dx = -\int f\left(\arctan \frac{1}{x}\right)d\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$

（18）$\int \frac{f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$

$(a>0)$

（19）$\int \frac{f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)$

$(a>0)$

（20）$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C \qquad \left(f(x)\neq 0\right)$

2．第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)+C$，

则

$$\int f(x)dx \xlongequal{令x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)+C = G\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C$$

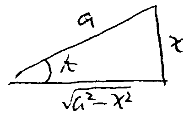
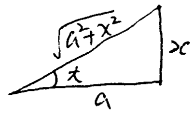
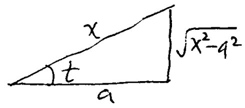
其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

第二换元积分法绝大多数用于根式的被积函数，通过换元把根式去掉，其常见的变量替换分为两大类：

第一类：被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 或由 e^x 构成的代数式的根式，例如 $\sqrt{ae^x+b}$ 等。

只要令根式 $\sqrt[n]{g(x)}=t$，解出 $x=\varphi(t)$ 已经不再有根式，那么就作这种变量替换 $x=\varphi(t)$ 即可。

第二类：被积函数含有 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ $(A\neq 0)$，如果仍令 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}=t$ 解出 $x=\varphi(t)$ 仍是根号，那么这样变量替换不行，要作特殊处理，将 $A>0$ 时先化为 $\sqrt{A}\left[(x-x_0)^2 \pm l^2\right]$，$A<0$ 时，先化为 $\sqrt{(-A)\left[l^2-(x-x_0)^2\right]}$ 然后再作下列三种三角替换之一：

根式的形式	所作替换	三角形示意图（求反函数用）
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

3．分部积分法

设 $u(x)$，$v(x)$ 均有连续的导数，则

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

或 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

使用分部积分法时被积函数中谁看作 $u(x)$ 谁看作 $v'(x)$ 有一定规律。

（1）$P_n(x)e^{ax}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$ 情形，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，a 为常数，要进行 n 次分部积分法，每次均取 e^{ax}，$\sin ax$，$\cos ax$ 为 $v'(x)$；多项式部分为 $u(x)$。

（2）$P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$ 情形，$P_n(x)$ 为 n 次多项式取 $P_n(x)$ 为 $v'(x)$，而 $\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 为 $u(x)$，用分部积分法一次，被积函数的形式发生变化，再考虑其它方法。

（3）$e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 情形，进行二次分部积分法后要移项，合并。

（4）比较复杂的被积函数使用分部积分法，要用凑微

分法，使尽量多的因子和 dx 凑成

一．定积分的概念与性质

1．定积分的性质

（1）$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

（2）$\int_a^a f(x)dx=0$

（3）$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx=k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx$

（4）$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（$c$ 也可以在 $[a,b]$ 之外）

（5）设 $a\le b$，$f(x)\le g(x)$ $(a\le x\le b)$，则

$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

（6）设 $a<b$，$m\le f(x)\le M$ $(a\le x\le b)$，则

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

（7）设 $a<b$，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$

（8）定积分中值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

定义：我们称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值

（9）奇偶函数的积分性质

$\int_{-a}^a f(x)dx=0$（f 奇函数）

$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$（$f$ 偶函数）

（10）周期函数的积分性质

设 $f(x)$ 以 T 为周期，a 为常数，则

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

二．基本定理

1．变上限积分的函数

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$ 称为变上限积分的函数

定理:（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$

推广形式：设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，

则 $F'(x)=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

2．牛顿—莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意一个原函数，

则有 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

（注：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可以很容易地用上面变上限积分的方法来证明；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，牛顿一莱布尼兹公式仍成立，但证明方法就很复杂）

三．定积分的换元积分法和分部积分法

1．定积分的换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变量替换 $x=\varphi(t)$ 满足

（1）$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续；

（2）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，且当 $\alpha\le t\le\beta$ 时，$a\le\varphi(t)\le b$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

2．定积分的分部积分法

设 $u'(x),v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

或 $\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

定积分的应用

一．平面图形的面积

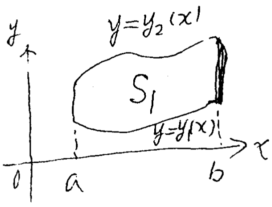
1．直角坐标系

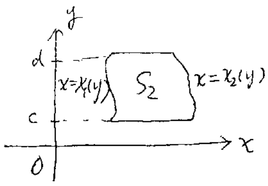
模型 I $S_1=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx$

其中 $y_2(x)\ge y_1(x)$，$x\in[a,b]$

模型 II $S_2=\int_c^d[x_2(y)-x_1(y)]dy$

其中 $x_2(y)\ge x_1(y)$，$y\in[c,d]$

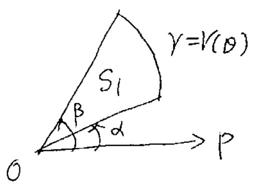


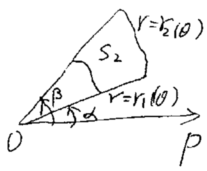


2．构坐标系

模型 I $S_1=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$

模型 II $S_2=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]d\theta$

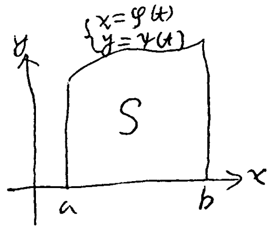




3．参数形式表出的曲线所围成的面积

设曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$(\alpha\le t\le\beta)$ $\varphi(\alpha)=a$，$\psi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续导数，且 $\varphi'(t)$ 不变号，$\psi(t)\ge 0$ 且连续，则曲边梯形面积（曲线 C 与直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成）

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt$$



二．平面曲线的弧长（数学一和数学二）

1．直角坐标系

设光滑曲线 $y=y(x)$，$(a\le x\le b)$[也即 $y(x)$ 有连续的导数]

弧长 $S=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$

而 $dS=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$ 也称为弧微分

2．构坐标系

设光滑曲线 $r=r(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$[$r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数]

弧长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

3．参数方程所表曲线的弧长

设光滑曲线 $C\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$[$x(t)$，$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数]

曲线 C 的弧长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

三．特殊的空间图形的体积（一般体积要用二重积分）

1．已知平行截面面积的立体体积

设空间一个立体由一个曲面和垂直于 z 轴两平面 $z=c$ 和 $z=d$ 所围成，z 轴每一点 $z(c\le z\le d)$ 且垂直于 z 轴的立体截面的面积 $S(z)$ 为已知的连续函数，则立体体积

$$V=\int_c^d S(z)dz$$

2．绕坐标轴旋转的旋转体的体积

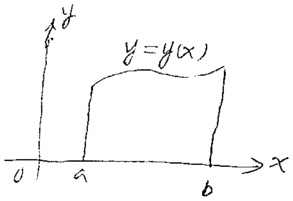
（1）平面图形由曲线 $y=y(x)\ (\ge 0)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴围成

绕 x 轴旋转一周的体积

$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx$

绕 y 轴旋转一周的体积

$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx$

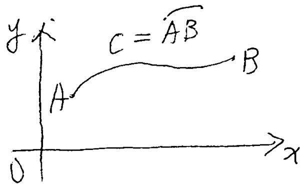


（2）平面图形由曲线 $x = x(y)$ (≥ 0) 与直线 $y = c$，$y = d$ 和 y 轴围成

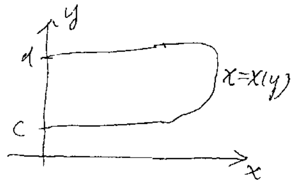
绕 y 轴旋转一周的体积

$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy$

绕 x 轴旋转一周的体积



$V_x = 2\pi \int_c^d yx(y)dy$



四．绕坐标轴旋转的旋转曲面的面积（数学一和数学二）

设平面曲线 $C = \overset{\frown}{AB}$ 位于 x 轴上方，它绕 x 轴一周所得旋转曲面的面积为 S。

1．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$

则 $S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

2．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$

则 $S = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,d\theta$

3．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$(\alpha \le t \le \beta)$

则 $S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

常微分方程

二．变量可分离方程及其推广

1．变量可分离的方程

（1）方程形式：$\dfrac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$ $\quad (Q(y) \ne 0)$

通解 $\int \dfrac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C$

（注：在微分方程求解中，习惯地把不定积分只求出它的一个原函数，而任意常数另外再加）

（2）方程形式：$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

通解 $\int \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$

$(M_2(x) \ne 0, N_1(y) \ne 0)$

2．变量可分离方程的推广形式

（1）齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令 $\dfrac{y}{x} = u$，

则 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx} = f(u)$

$\int \dfrac{du}{f(u) - u} = \int \dfrac{dx}{x} + c = \ln|x| + c$

（2）$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)(a\neq 0,b\neq 0)$

令 $ax+by+c=u$，

则 $\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

$$\int\frac{du}{a+bf(u)}=\int dx=x+c$$

（3）$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

① 当 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 情形，先求出

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解 (α,β)

令 $u=x-\alpha$，$v=y-\beta$

则 $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)$ 属于齐次方程情形

②当 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ 情形，

令 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$

则 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$

令 $u=a_1x+b_1y$，

则 $\frac{du}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}=a_1+b_1f\left(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}\right)$

属于变量可分离方程情形。

三．一阶线性方程及其推广

1．一阶线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

它也是变量可分离方程，通解公式 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，（c 为任意常数）

2．一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

用常数变易法可求出通解公式

令 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

代入方程求出 $C(x)$

则得 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

3．贝努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$$

令 $z=y^{1-\alpha}$

把原方程化为 $\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$

再按照一阶线性非齐次方程求解。

4．方程：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q(y)-P(y)x}$

可化为 $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$

以 y 为自变量，x 为未知函数

再按照一阶线性非齐次方程求解。

四．全微分方程及其推广（数学一）

1．全微分方程

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

通解：$u(x,y)=C$，

其中 $u(x,y)$ 满足 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

求 $u(x,y)$ 的常用方法。

第一种：凑全微分法

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\Lambda=du(x,y)$$

把常见的一些二元函数的全微分公式要倒背如流，就很有帮助。

（1）$xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$；

（2）$xdx-ydy=d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$；

（3） $ydx + xdy = d(xy)$；

（4） $\dfrac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$；

（5） $\dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right]$；

（6） $\dfrac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} = d\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2 - y^2)\right]$；

（7） $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$；

（8） $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$；

（9） $\dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\dfrac{x}{y}\right)$；

（10） $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$；

（11） $\dfrac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x - y}{x + y}\right)$；

（12） $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + y}{x - y}\right)$；

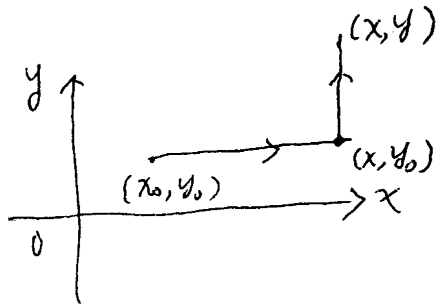
（13） $\dfrac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^2} = d\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$；

（14） $\dfrac{xdx - ydy}{(x^2 - y^2)^2} = d\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 - y^2}\right)$；

（15） $\dfrac{xdx + ydy}{1 + (x^2 + y^2)^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x^2 + y^2)\right)$；

（16） $\dfrac{xdx - ydy}{1 + (x^2 - y^2)^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x^2 - y^2)\right)$；

第二种：特殊路径积分法（因为积分与路径无关）



$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

第三种：不定积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ 得

$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$

对 y 求导，

得 $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right] + C'(y)$，

求出 $C'(y)$ 积分后求出 $C(y)$

2．全微分方程的推广（约当因子法）

设 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 不是全微分方程。

不满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

但是存在 $R(x,y)$

使得 $R(x,y)P(x,y)dx + R(x,y)Q(x,y)dy = 0$ 为全微分方程，

也即满足 $\dfrac{\partial[RQ]}{\partial x} = \dfrac{\partial[RP]}{\partial y}$

则 $R(x,y)$ 称为约当因子，

按全微分方程解法仍可求出

$$R(x,y)P(x,y)dx + R(x,y)Q(x,y)dy = du(x,y)$$

通解 $u(x,y) = C$ 。

这种情形，求约当因子是关键。

特殊的高阶微分方程

一．可降阶的高阶微分方程

方程类型	解法及解的表达式
$y^{(n)}=f(x)$	通解 $y=\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n次} f(x)(dx)^n+C_1x^{n-1}+C_2x$
$y''=f(x,y')$	令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程$\Rightarrow$ $p'=f(x,p)$——一阶方程，设其解为 $p=g(x,C_1)$， 即 $y'=g(x,C_1)$，则原方程的通解为 $y=\int g(x,C_1)dx+C_2$ 。
$y''=f(y,y')$	令 $y'=p$，把 p 看作 y 的函数，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ 把 y'， y'' 的表达式代入原方程，得 $\frac{dp}{dy}=\frac{1}{p}f(y,p)$——一阶方程， 设其解为 $p=g(y,C_1)$, 即 $\frac{dy}{dx}g(y,C_1)$，则原方程的通解为 $\int\frac{dy}{g(y,C_1)}=x+C_2$ 。

二．线性微分方程解的性质与结构

我们讨论二阶线性微分方程解的性质与结构，其结论很容易地推广到更高阶的线性微分方程。

二阶齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad （1）$$

二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad （2）$$

1．若 $y_1(x)$， $y_2(x)$为二阶齐次线性方程的两个特解，则它们的线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$（C_1，C_2 为任意常数）仍为同方程的解，特别地，当 $y_1(x)\neq\lambda y_2(x)$（λ 为常数），也即 $y_1(x)$与 $y_2(x)$线性无关时，则方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

2．若 $y_1(x)$，$y_2(x)$为二阶非齐次线性方程的两个特解，则 $y_1(x)-y_2(x)$为对应的二阶齐次线性方程的一个特解。

3．若 $\bar{y}(x)$为二阶非齐次线性方程的一个特解，而 $y(x)$为对应的二阶齐次线性方程的任意特解，则 $\bar{y}(x)+y(x)$为此二阶非齐次线性方程的一个特解。

4．若 $\bar{y}$ 为二阶非齐次线性方程的一个特解，而 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为对应的二阶齐次线性方程的通解（C_1， C_2 为独立的任意常数）则 $y=\bar{y}(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是此二阶非齐次线性方程的通解。

5．设 $y_1(x)$与 $y_2(x)$分别是

$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$与

$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的特解，则

$y_1(x)+y_2(x)$是

$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解。

三．二阶和某些高阶常系数齐次线性方程

1．二阶常系数齐次线性方程

$$y''+py'+qy=0$$

其中 p， q 为常数，

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

特征方程根的三种不同情形对应方程通解的三种形式

（1）当 $\Delta=p^2-4q>0$，特征方程有两个不同的实根 λ_1， λ_2

则方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

（2）当 $\Delta=p^2-4q=0$，特征方程有二重根 $\lambda_1=\lambda_2$

则方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$

（3）当 $\Delta=p^2-4q<0$，特征方程有共轭复根 $\alpha\pm i\beta$，

则方程的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2．n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\Lambda+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

其中 $p_i(i=1,2,\Lambda,n)$ 为常数。

相应的特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\Lambda+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

特征根与方程通解的关系同二阶情形很类似。

（1）若特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$

则方程通解 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\Lambda+C_ne^{\lambda_n x}$

（2）若 λ_0 为特征方程的 k 重实根 $(k\le n)$

则方程通解中含有 $(C_1+C_2x+\Lambda+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0 x}$

（3）若 $\alpha\pm i\beta$ 为特征方程的 k 重共轭复根 $(2k\le n)$

则方程通解中含有

$$e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2x+\Lambda+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\Lambda+D_kx^{k-1})\sin\beta x\right]$$

由此可见，常系数齐次线性方程的通解完全被其特征方程的根所决定，但是三次及三次以上代数方程的根不一定容易求得，因此只能讨论某些容易求特征方程的根所对应的高阶常系数齐次线性方程的通解。

四．二阶常系数非齐次线性方程

方程：$y''+py'+qy=f(x)$　其中 p,q 为常数

通解：$y=\bar{y}+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

其中 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应二阶常系数齐次线性方程的通解上面已经讨论。所以关键要讨论二阶常系数非齐次线性方程的一个特解 $\bar{y}$ 如何求？

我们根据 $f(x)$ 的形式，先确定特解 $\bar{y}$ 的形式，其中包含一些待定的系数，然后代入方程确定这些系数就得到特解 $\bar{y}$，常见的 $f(x)$ 的形式和相对应地 $\bar{y}$ 的形式如下：

1．$f(x)=P_n(x)$，其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式

（1）若 0 不是特征根，则令 $\bar{y}=R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n$

其中 $a_i(i=0,1,2,\Lambda,n)$ 为待定系数。

（2）若 0 是特征方程的单根，则令 $\bar{y}=xR_n(x)$

（3）若 0 是特征方程的重根，则令 $\bar{y}=x^2R_n(x)$

2．$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，α 为实常数

（1）若 α 不是特征根，则令 $\bar{y}=R_n(x)e^{\alpha x}$

（2）若 α 是特征方程单根，则令 $\bar{y}=xR_n(x)e^{\alpha x}$

（3）若 α 是特征方程的重根，则令 $\bar{y}=x^2R_n(x)e^{\alpha x}$

3．$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，α,β 皆为实常数

（1）若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，则令 $\bar{y}=e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x]$

其中 $R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n$

$a_i(i=0,1,\Lambda,n)$ 为待定系数

$T_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\Lambda+b_{n-1}x+b_n$

$b_i(i=0,1,\Lambda,n)$ 为待定系数

（2）若$\alpha \pm i\beta$是特征根，则令

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}\left[R_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x\right]$$

五．欧拉方程（数学一）

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \Lambda + p_{n-1} x y' + p_n y = 0 \text{ ，}$$

其中 $p_i(i=1,2,\Lambda,n)$ 为常数称为 n 阶欧拉方程。令 $x=e^t$ 代入方程，变为t是自变量，y是未知函数的微分方程，一定是常系数齐次线性微分方程。

注意下面变换公式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

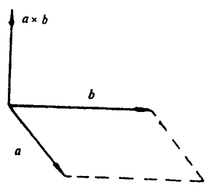
向量代数与空间解析几何

三．向量的运算

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k = \{c_1, c_2, c_3\}$$



1．加法。$a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$

减法。$a - b = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$

2．数乘。$\lambda\alpha = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$（$\lambda$是常数）

向量的加、减和数乘运算统称线性运算。

3．数量积。$a\cdot b = |a||b|\cdot\cos\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

其中$\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$为向量$a,b$间夹角

$a\cdot b$为数量也称点乘。

$a\cdot b^0$表示向量a在向量b上的投影，即

$$a\cdot b^0 = \Pr j_b a$$

4．向量积$a\times b$也称为叉乘。

$$|a\times b| = |a||b|\sin\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$$

$a\times b$的方向按右手法则垂直于a,b所在平面，且

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$a\times b$是向量，$a\times b = -b\times a$。$|a\times b|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积。

5．混合积：定义$(a,b,c) = (a\times b)\cdot c$，坐标公式

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

几何意义$|(a,b,c)|$表示以a,b,c为棱的平行六面体的体积。

四．两向量间的关系

设$a = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, b_3\}$

关系	向量表示	向量坐标表示
a,b间夹角(φ)	$\cos\varphi = \dfrac{a\cdot b}{\lvert a\rvert\lvert b\rvert}$	$\cos\varphi = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
a与b垂直	$a\cdot b = 0$	$a_1b_1 + a_2b_2 + b_3b_3 = 0$

a 与 b 平行	$a\times b=0$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

二．平面及其方程

1．法（线）向量，法（线）方向数。

与平面 π 垂直的非零向量，称为平面 π 的法向量，通常记成 n。法向量 $\{m,n,p\}$ 的坐标称为法（线）方向数。对于给定的平面 π，它的法向量有无穷多个，但它所指的方向只有两个。

2．点法式方程　已知平面 π 过 $M(x_0,y_0,z_0)$ 点，其法向量 $n=\{A,B,C\}$，则平面 π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

或 $n\cdot(r-r_0)=0$

其中 $r_0=\{x_0,y_0,z_0\},r=\{x,y,z\}$

3．一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 A,B,C 不全为零。x,y,z 前的系数表示 π 的法线方向数，$n=\{A,B,C\}$ 是 π 的法向量。

特别情形：

$Ax+By+Cz=0$，表示通过原点的平面。

$Ax+By+D=0$，平行于 z 轴的平面。

$Ax+D=0$，平行 yOz 平面的平面。

$x=0$ 表示 yOz 平面。

4．三点式方程

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$ 三点不在一条直线上，则通过 A,B,C 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

5．平面束

设直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，则通过 L 的所有平面方程为

$$k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

，其中 $(k_1,k_2)\neq(0,0)$。

6．有关平面的问题

两平面为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

π_1 与 π_2 间夹角 (φ)	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
垂直条件	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
平行条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\left(\neq\frac{D_1}{D_2}\right)$
重合条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，而点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 π 外的一点，则 M 到平面 π 的距离 d：

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

三．直线及其方程

1．方向向量、方向数

与直线平行的非零向量 S，称为直线 L 的方向向量，方向向量的坐标称为方向数。

2．直线的标准方程（对称式方程）。

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上的点，l,m,n 为直线的方向数。

3．参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$s = \{l, m, n\}$，t 为参变量。

4．两点式

设 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 为不同的两点，则通过 A 和 B 的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5．一般式方程（作为两平面的交线）：

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$，方向向量 $S = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\}$

6．有关直线的问题

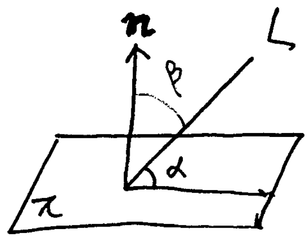
两直线为

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

L_1 与 L_2 间夹角 (θ)	$\cos\theta = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$
垂直条件	$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$
平行条件	$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

四．平面与直线相互关系



平面 π 的方程为：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

直线 L 的方程为：

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

L 与 π 间夹角（α）	$\sin\alpha = \dfrac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$
L 与 π 垂直条件	$\dfrac{l}{A} = \dfrac{m}{B} = \dfrac{n}{C}$
L 与 π 平行条件	$Al + Bm + Cn = 0$
L 与 π 重合条件	$Al + Bm + Cn = 0$ L 上有一点在 π 上

多元函数微分学

多元函数的偏导数与全微分

四．方向导数与梯度（数学一）

1．平面情形

$z = (x, y)$ 在平面上过点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿方向 $l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的梯度为

$$grad f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

而方向导数与梯度的关系为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = [grad f(x_0, y_0)] \cdot l$$

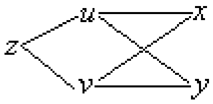
$$= |grad f(x_0, y_0)| \cos l(grad f(x_0, y_0), l)$$

多元函数微分法

一．复合函数微分法——锁链公式

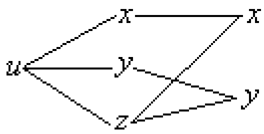
模型 1．$z = f(u, v)$，$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



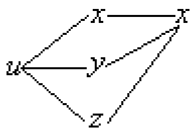
模型 2． $u=f(x,y,z)$， $z=z(x,y)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$



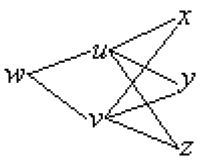
模型 3． $u=f(x,y,z)$， $y=y(x)$， $z=z(x)$

$$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\cdot y'(x)+f'_z\cdot z'(x)$$



模型 4． $w=f(u,v)$，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=f'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial y}=f'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial z}=f'_u\dfrac{\partial u}{\partial z}+f'_v\dfrac{\partial v}{\partial z}\end{cases}$$



还有其它模型可以类似处理

二．隐函数微分法

设 $F(x,y,z)=0$

（1）确定 $z=z(x,y)$ 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$

（2）确定 $x=x(y,z)$ 则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_x}$； $\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{F'_z}{F'_x}$

（3）确定

$y=y(z,x)$ 则 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F'_z}{F'_y}$； $\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$

多元函数的极值和最值

一．求 $z=f(x,y)$ 的极值

第一步 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 求出驻点 (x_k,y_k) $(k=1,2,\Lambda,l)$

第二步 令 $\Delta_k=f''_{xx}(x_k,y_k)f''_{yy}(x_k,y_k)-\left[f''_{xy}(x_k,y_k)\right]^2$

若 $\Delta_k<0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 不是极值

若 $\Delta_k=0$ 则不能确定（需从极值定义出发讨论）

若 $\Delta_k>0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 是极值

进一步 若 $f''_{xx}(x_k,y_k)>0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极小值

若 $f''_{xx}(x_k,y_k)<0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极大值

二．求多元 $(n\ge 2)$ 函数条件极值的拉格朗日乘子法

求 $u=f(x_1,\Lambda,x_n)$ 的极值

约束条件 $\begin{cases}\varphi_1(x_1,\Lambda,x_n)=0\\ \quad\text{M} \\ \varphi_m(x_1,\Lambda,x_n)=0\end{cases}$ $(m<n)$

作

$$F=F(x_1,\Lambda,x_n,\lambda_1,\Lambda,\lambda_m)=f(x_1,\Lambda,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\Lambda,x_n)$$

$$\begin{cases} F'_{x_1}=0 \\ \vdots \\ F'_{x_n}=0 \\ F'_{\lambda_1}=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ F'_{\lambda_m}=\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

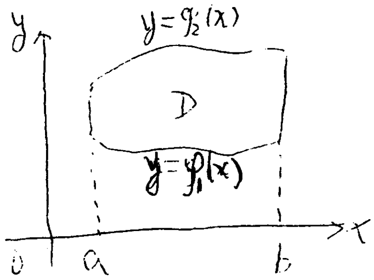
求出 $\left(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)(k=1,2,\cdots,l)$ 是有可能的条件极值点，一般再由实际问题的含义确定其充分性。这种方法的关键是解方程组的有关技巧。

多元函数积分学

二．在直角坐标系中化二重积分为累次积分以及交换积分顺序问题

模型 I：设有界闭区域

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$



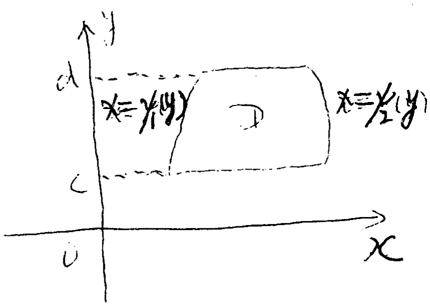
其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续。

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$

模型 II：设有界闭区域

$$D=\{(x,y)|c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$



其中 $\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续。

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$$

关于二重积分的计算主要根据模型 I 或模型 II 把二重积分化为累次积分从而进行计算，对于比较复杂的区域 D，如果既不符合模型 I 中关于 D 的要求，又不符合模型 II 中关于 D 的要求，那么就需要把 D 分解成一些小区域，使得每一个小区域能够符合模型 I 或模型 II 中关于区域的要求，利用二重积分性质，把大区域上二重积分等于这些小区域上二重积分之和，而每个小区域上的二重积分则可以化为累次积分进行计算。

在直角坐标系中，两种不同顺序的累次积分的互相转化是一种很重要的手段，具体做法是先把给定的累次积分反过来化为二重积分，求出它的积分区域 D，然后根据 D 再把二重积分化为另外一种顺序的累次积分。

三．在极坐标系中化二重积分为累次积分

在极坐标系中一般只考虑一种顺序的累次积分，也即先固定 θ 对 γ 进行积分，然后再对 θ 进行积分，由于区域 D 的不同类型，也有几种常用的模型。

模型：设有界闭区域

$$D=\{(\gamma,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,\varphi_1(\theta)\le\gamma\le\varphi_2(\theta)\}$$

其中 $\varphi_1(\theta)$，$\varphi_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，

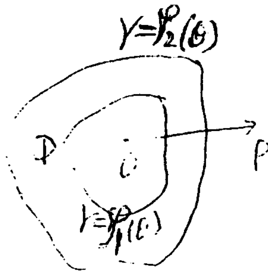
$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

模型 I：设有界闭区域

$$D=\{(\gamma,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,\varphi_1(\theta)\le\gamma\le\varphi_2(\theta)\}$$



其中 $\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，

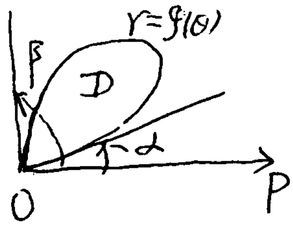
$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

模型II：设有界闭区域

$$D=\{(\gamma,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,0\le\gamma\le\varphi(\theta)\}$$



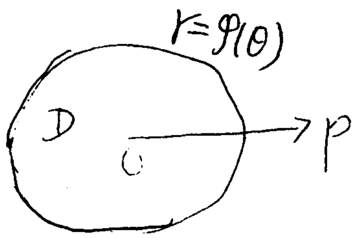
其中$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

模型III：设有界闭区域

$$D=\{(\gamma,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,0\le\gamma\le\varphi(\theta)\}$$



其中$\varphi(\theta)$在$[0,2\pi]$上连续，$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

四．二重积分在几何上的应用

1．空间物体的体积

$$V=\iint_D[f_2(x,y)-f_1(x,y)]d\sigma$$

其中D为闭曲面S在xy平面上投影区域$z=f_2(x,y)$为上半曲面，$z=f_1(x,y)$为下半曲面。

2．空间曲面的面积

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma$$

其中D为曲面S在xy平面上投影，曲面S的方程$z=z(x,y)$

三重积分

二．三重积分的计算方法

1．直角坐标系中三重积分化为累次积分

（1）设Ω是空间的有界闭区域，

$$\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\}$$

其中D是xy平面上的有界闭区域，$z_1(x,y),z_2(x,y)$在D上连续，函数$f(x,y,z)$在Ω上连续，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

（2）设$\Omega=\{(x,y,z)|\alpha\le z\le\beta,(x,y)\in D(z)\}$

其中$D(z)$为竖坐标为z的平面上的有界闭区域，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta dz\iint_{D(z)}f(x,y,z)dxdy$$

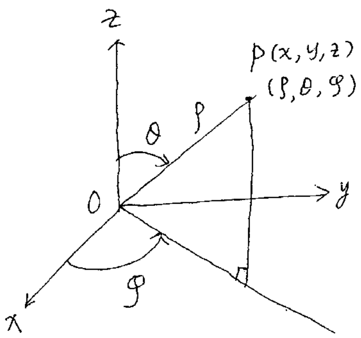
2．柱坐标系中三重积分的计算

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta,z)\gamma\, d\gamma\, d\theta\, dz$$

相当于把(x,y)化为极坐标(γ,θ)而z保持不变。

3．球坐标系中三重积分的计算

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \begin{pmatrix} \rho\ge 0 \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\,\theta\, d\varphi$$

然后再根据Ω把三重积分化为关于ρ,θ,φ的累次积分。

曲线积分

一．第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

空间情形：空间一条逐段光滑曲线L上定义函数$f(x,y,z)$，把曲线L任意分割为n段，$\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda,\Delta S_n$在$\Delta S_k(1\le k\le n)$上任取一点$(\xi_k,\eta_k,s_k)$，如果对任意分割，任意取点，下列极限皆存在并且相等。

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta S_k$$

（这里ΔS_k又表示第k段曲线的弧长，$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta S_k$）

则称此极限值为$f(x,y,z)$在曲线L上的第一类曲线积分，也称为对弧长的曲线积分，记以

$$\int_L f(x,y,z)dS$$

如果曲线L是封闭曲线，也记以$\oint_L f(x,y,z)dS$

2．参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间曲线L的参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$

则

$$\int_L f(x,y,z)dS=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

（假设$f(x,y,z)$和$x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$皆连续）这样把曲线积分化为定积分来进行计算。

二．第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

空间情形：设空间一条逐段光滑有定向的曲线$L=\overset{\frown}{AB}$，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在L上皆有定义，把L任意分成n段，$\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda,\Delta S_n$，在$\Delta S_k(1\le k\le n)$上起点坐标为$(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1})$，终点坐标$(x_k,y_k,z_k)$（按$L$的定向决定起点和终点）令$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$，$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$(1\le k\le n)$再在$\Delta S_k$上任意一点$(\xi_k,\eta_k,s_k)$考虑极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta y_k+R(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta z_k]$$

其中λ仍是n段弧长中最大值，如果对任意分割，任意取点，上述极限皆存在并且相等，则称此极限值为$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$对空间曲线L的第二类曲线积分，也称对坐标的曲线积分，记以

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

它的向量形式为 $\int_L F\cdot dS$

其　中　$F=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

$dS=\{dx,dy,dz\}$

如果L是空间封闭曲线也要说明L的定向，在空间不能简单地说逆时针方向或顺时针方针，必须用其他方式

加以说明。

2．参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间有向曲线 L 的参数方程 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$，起点 A 对应参数为 α，终点 B 对应参数为 β（注意：现在 α 和 β 的大小不一定 $\alpha < \beta$）如果 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 皆连续，又 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ 也都连续，则

$$\int_{L=\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

这样把曲线积分化为定积分来计算。值得注意：如果曲线积分的定向相反，则第二类曲线积分的值差一个负号，而第一类曲线积分的值与定向无关，故曲线不考虑定向。

三．两类曲线积分之间的关系

1．平面情形

设 $L = \overset{\frown}{AB}$ 平面上一个逐段光滑有定向的曲线，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为曲线弧在点 (x,y) 处沿定向 A 到 B 方向的切线的方向余弦。

2．空间情形

设 $L = \overset{\frown}{AB}$ 为空间一条逐段光滑有定向的曲线，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 L 上连续，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上点 (x,y,z) 处沿定向 A 到 B 方向的切线的方向余弦。

四．格林公式

关于平面区域上的二重积分和它的边界曲线上的曲线积分之间的关系有一个十分重要的定理，它的结论就是格林公式。

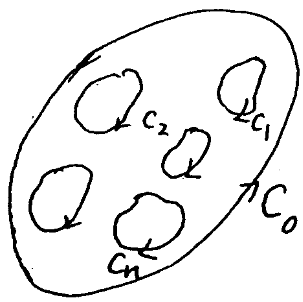
定理 1.（单连通区域情形）

设 xy 平面上有界闭区域 D 由一条逐段光滑闭曲线 L 所围成的单连通区域。当沿 L 正定向移动时区域 D 在 L 的左边，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

定理 2.（多连通区域情形）

设 xy 平面上有界闭区域 D 是 $(n+1)$ 连通区域（也即有 n 个“洞”），它的边界 $L = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$，其中 C_0 的定向为逆时针方向，$C_1,\cdots,C_n$ 定向皆为顺时针方向，仍符合沿 L 的正定向移动时区域 D 在它的左边这个原则。



函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$$

$$= \int_{C_0} Pdx + Qdy + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} Pdx + Qdy$$

五．平面上第二类曲线积分与路径无关的几个等价条件

设 $F\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 的分量 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，则下面几条彼此等价。

1．对 D 内任意一条逐段光滑闭曲线 L，都有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$

2．任意 $L = \overset{\frown}{AB}$ 在 D 内，则 $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ 只依赖于起点 A 和终点 B，与曲线 $L = \overset{\frown}{AB}$ 的取法无关，称为曲线积分与路径无关。

3．$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$ 成立。

4．D 内处处有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立。

5．向量场 $F\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 是有势场，即存在二元函数 $V(x,y)$，具有 $F = -gradV$，$V(x,y)$ 称为势函数，具有 $P = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$，$Q = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$。

曲面积分

一．第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

1．定义

设 S 为分块光滑曲面，$f(x,y,z)$ 在 S 上有定义，把曲面 S 任意分成 n 块小曲面 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Lambda, \Delta S_n$，在 $\Delta S_k (1 \le k \le n)$ 上任取一点 (ξ_k, η_k, s_k)，把小曲面 ΔS_k 的面积也记以 ΔS_k，而 λ 表示各小块曲面直径的最大值。如果对任意分割和任意取点，下列极限皆存在且相等

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, s_k) \Delta S_k$$

则称这极限值为 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一类曲面积分，也称对面积的曲面积分，记以

$$\iint_{S'} f(x,y,z) dS$$

2．基本计算公式

设曲面 S 的方程 $z = z(x,y), (x,y) \in D$，$z(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数。

$f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f[x,y,z(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dxdy$$

这样把第一类曲面积分化为二重积分进行计算。

二．第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

1．定义

设 S 为分块光滑有向曲面（已指定一侧为定向），$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 皆在 S 上有定义，把曲面 S 任意分成 n 个小曲面 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Lambda, \Delta S_n$，而 $\Delta S_k (1 \le k \le n)$ 在 yz 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{yz}$，在 zx 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{zx}$，在 xy 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{xy}$，又在 $\Delta S_k (1 \le k \le n)$ 上任取一点 (ξ_k, η_k, s_k)，令 λ 是各小块曲面直径的最大值，考虑极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k, s_k)(\Delta S_k)_{yz} + Q(\xi_k, \eta_k, s_k)(\Delta S_k)_{zx} + R(\xi_k, \eta_k, s_k)(\Delta S_k)_{xy} \right]$$

如果对任意分割，任意取点，极限值都存在并且相等，则这个极限限称为 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上的第二类曲面积分，也称为对面积的曲面

积分，记以

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

如果令 $F=\{P,Q,R\}$，$dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$

则向量形式为

$$\iint_S F\cdot dS$$

2．基本计算公式

如果曲面 S 的方程 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续，$R(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

若曲面 S 指定一侧的法向量与 z 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号。这样把这部分曲面积分化为 xy 平面上的二重积分。

类似地，曲面 S 的方程表示为 $x=x(y,z)$，$(y,z)\in D_{yz}$，则

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{YZ}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

曲面 S 指定一侧的法向量与 x 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号，如果曲面 S 的方程表示为 $y=y(z,x)$，$(z,x)\in D_{zx}$，则

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{ZX}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

曲面 S 指定一侧的法向量与 y 轴成锐角取正号，成钝角取负号。由此可见，第二类曲面积分用基本公式进行计算是很麻烦的。绝大多数情形都用下面的定理进行计算，但是当 P,Q,R 有些为 0 只剩下一项或二项时，也有可能用基本公式进行计算。

三．两类曲面积分之间的关系

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 在点 (x,y,z) 处根据定向指定一侧的法向量的三个方向余弦。

令 $F=\{P,Q,R\}$，　$n_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S F\cdot n_0 dS$$

四．高斯公式

定理 1．（单连通区域）

设 Ω 是由分块光滑曲面 S 围成的单连通有界闭区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（外侧）

$$=\iint_S[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 S 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。

定理 2．（多连通区域）

设 Ω 是 $(n+1)$ 连通区域，外面边界曲面 S_0 为外侧，每一个“洞”的边界曲面 $S_k'(1\le k\le n)$ 为内侧，彼此不重叠，都在 S_0 的内部。这些曲面都是分块光滑的，Ω 是有界闭区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint_{S_0} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（外侧）

$$+\sum_{k=1}^n\iint_{S_K} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（内侧）

五．斯托克斯公式

定理：设 L 是逐段光滑有向闭曲线，S 是以 L 为边界的分块光滑有向曲面，L 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域

内有连续的一阶偏导数，则有

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

也可用第一类曲面积分

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

六．散度与旋度

讨论中有三个概念很重要，就是梯度、散度和旋度。前面我们已经讨论过梯度：

设 $u=u(x,y,z)$ 算 $\partial\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

$gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nabla u$ 称为 u 的梯度。

1．散度

设 $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度 $divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot F$ 称为 F 的散度

高斯公式可写成 $\iiint_\Omega divFdv=\iint_S F\cdot n_0 dS$

（外侧）

$n_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

2．旋度

设 $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

旋度 $rotF=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

称为 F 的旋度。

斯托克斯公式可写成 $\oint_L F\cdot dr=\iint_S (rotF)\cdot n_0 dS$

其中 $dr=(dx,dy,dz)$， $n_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

无穷级数

常数项级数

1．基本性质

（1）如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 皆收敛，a,b 为常数，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$ 收敛，且等于 $a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

（2）在级数中增加或减少或变更有限项则级数的收敛性不变。

（3）收敛级数具有结合律，也即对级数的项任意加括号所得到的新级数仍收敛，而且其和不变。

发散级数不具有结合律，引言中的级数可见是发散的，所以不同加括号后得到级数的情形就不同。

（4）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$。

（注：引言中提到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，具有 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在，因此收敛级数的必要条件不满足，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 发散。调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是分散的。所以满足收敛级数的必要条件 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛性尚不能确定。）

2．两类重要的级数

（1）等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \ (a \neq 0)$$

当$|r|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$收敛；

当$|r|\ge 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$发散。

（2）p—级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$收敛；

当$p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散。

（注：$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$的和一般不作要求，但后面用特殊的方法可知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。）

二．正项级数敛散性的判别法

若$u_n \ge 0 (n=1,2,3,\Lambda)$则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$称为正项级数，这时

$$S_{n+1} \ge S_n (n=1,2,3,\Lambda)$$

所以$\{S_n\}$是单调增加数列，它是否收敛就只取决于S_n是否有上界。

因此$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow S_n$有上界，这是正项级数比较判别法的基础。从而也是正项级数其它判别法的基础。

1．比较判别法

设$c>0$，当$n\ge N$时，$cv_n \ge u_n > 0$皆成立。

如果$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

如果$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

2．比较判别法的极限形式

设$u_n \ge 0$，$v_n \ge 0$，$(n=1,2,3,\Lambda)$

若$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

（1）当$0<A<+\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。

（2）当$A=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（3）当$A=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛。

3．比值判别法（达朗倍尔）

设$u_n > 0$，而$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

（1）当$\rho<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（2）当$\rho>1$（包括$\rho=+\infty$）时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

（3）当$\rho=1$时，此判别法无效。

（注：如果$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在时，此判别法也无法用。）

4．根值判别法（柯西）

设$u_n \ge 0$，而$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

（1）当$\rho<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

（2）当 $\rho>1$（包括 $\rho=+\infty$）时，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

（3）当 $\rho=1$时，此判别法无效。

事实上，比值判别法和根值判别法都是与等比级数比较得出相应的结论。应用时，根据所给级数的形状有不同的选择，但它们在 $\rho=1$情形都无能为力，数学上有更精细一些的判别法，但较复杂，对考研来说，不作要求。

三．交错级数及其莱布尼兹判别法

1．交错级数概念

若 $u_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 称为交错级数。

2．莱布尼兹判别法

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足：

（1）$u_{n+1}\le u_n\left(n=1,2,3,\Lambda\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛， 且 $0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n<u_1$

四．绝对收敛与条件收敛

1．定理

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛；反之不然。

2．定义

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛。

3．有关性质

（1）绝对收敛级数具有交换律，也即级数中无穷多项任意交换顺序，得到级数仍是绝对收敛，且其和不变。

（2）条件收敛级数的正项或负项构成的级数，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(|u_n|+u_n\right)$或$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(u_n-|u_n|\right)$一定是发散的。

4．一类重要的级数

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$

（1）当 $p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是绝对收敛的。

（2）当 $0<p\le1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是条件收敛的。

（3）当 $p\le0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是发散的。

幂级数

一．函数项级数及其收敛域与和函数（数学一）

1．函数项级数概念

设 $u_n(x)$ $\left(n=1,2,3,\Lambda\right)$ 皆定义在区间 I 上，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为区间 I 上的函数项级数

2．收敛域

设 $x_0\in \mathrm{I}$，如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点，

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$发散，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散点。

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点构成的集合就称为收敛域。

所有发散点构成的集合称为发散域。

3．和函数

在 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域的每一点都有和，它与 x 有关，

因此

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in \text{收敛域}$$

称 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数，它的定义域就是函数项级数的收敛域。

二．幂级数及其收敛域

1．幂级数概念

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为 $(x-x_0)$ 的幂级数，$a_n(n=0,1,2,\Lambda)$ 称为幂级数的系数，是常数。

当 $x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数。

一般讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有关问题，作平移替换就可以得出有关 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的有关结论。

2．幂级数的收敛域

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域分三种情形

（1）收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，亦即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对每一个 x 皆收敛。我们称它的收敛半径 $R=+\infty$。

（2）收敛域仅为原点，除原点外幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 皆发散，我们称它的收敛半径 $R=0$。

（3）收敛域为 $(-R,R)$ 或 $(-R,R]$ 或 $[-R,R)$ 或 $[-R,R]$ 中的一种，我们称它的收敛半径为 $R\ (0<R<+\infty)$。

所以求幂级数的收敛半径 R 非常重要，（1），（2）两种情形的收敛域就确定的。而 (3) 的情形，还需讨论 $\pm R$ 两点上的敛散性。

如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$（包括 $+\infty$）或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$（包括 $+\infty$）

则收敛半径 $R=\frac{1}{l}$（若 $l=+\infty$，则 $R=0$；若 $l=0$，则 $R=+\infty$）

如果上述两极限不成立，那么就要用其它方法求收敛半径，后面有所讨论。

三．幂级数的性质

1．四则运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$，$|x|<R_1$；$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=g(x)$，$|x|<R_2$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x),\ |x|<\min(R_1,R_2)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+\Lambda+a_kb_{n-k}+\Lambda+a_nb_0)x^n=f(x)\cdot g(x)$$

$|x|<\min(R_1,R_2)$

2．分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为和函数，则有下列重要性质

（1）$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求导后幂级数的收敛半径不变，因此得出 $S(x)$ 在

$(-R,R)$内有任意阶导数，公式为

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\quad,$$

$|x|<R\ (k=1,2,3,\cdots)$

（2）$S(x)$在$(-R,R)$内有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且这个幂级数的收敛半径也不变

（3）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S(x)$　在$x=R(-R)$成立。则有下列性质：

（i）$\lim_{x\to R^-}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$ 成立

$\left(\lim_{x\to(-R)^+}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n\text{成立}\right)$

（ii）$\int_0^R S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 成立

$\left(\int_{-R}^0 S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-a_n}{n+1}(-R)^{n+1}\text{成立}\right)$

（iii）$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ 在$x=R(-R)$不一定收敛

也即$\sum_{n=1}^{\infty}na_n R^{n-1}=S'_-(R)$不一定成立，$(S'_+(-R))$

如果$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$x=R(-R)$发散，那么逐项求导后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ 在$x=R(-R)$一定发散，而逐项积分后的级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在$x=R(-R)$有可能收敛。

四．幂级数求和函数的基本方法

1．把已知函数的幂级数展开式（§8.3 将讨论）反过来用

下列基本公式应熟背

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，$|x|<+\infty$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$，$|x|<+\infty$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$，$|x|<+\infty$

（5）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x)$，$(-1<x\le 1)$

（6）$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=(1+x)^\alpha$，$(-1<x<1)$（$\alpha$ 为实常数）

2．用逐项求导和逐项积分方法以及等比级数的求和公式

3．用逐项求导和逐项积分方法化为和函数的微分方程，从而求微分方程的解

五．利用幂级数求和函数得出有关常数项级数的和（强化班再讨论）

将函数展开成幂级数

一．泰勒级数与麦克劳林级数的概念

1．基本概念

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一领域$|x-x_0|<\delta$ 内具有任意阶导数，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$在 x_0 处的泰勒级数。

（注：这里泰勒级数是否收敛？是否收敛于 $f(x)$都不知道）特别地，当 $x_0=0$，则级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$的麦克劳林级数。

2．函数展成幂级数的条件

设 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内有任意阶导数，它的泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 为 n 阶余项，它的拉格朗日型为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

则 $f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$， $|x-x_0|<R$

的充要条件为 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ $\quad |x-x_0|<R$

而且 $f(x)$ 在 x_0 处幂级数展开式是唯一的。

特别地，$x_0=0$ 时得到函数展成麦克劳林级数的充分必要条件。

二．函数展成幂级数的方法

1．套公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0|<R$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

例 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$， $\quad |x|<+\infty$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x|<+\infty$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$|x|<1$，

（α 为实常数）

2．逐项求导

例：$\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$， $|x|<+\infty$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, \quad |x|<1$$

3．变量替换法

例：$e^{x^2}=e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$， $|x|<+\infty$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},$$

$|x|<1$

4．逐项积分法

例：$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x\le 1)$$

由此可得 $\quad \ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$$

$(-1\le x\le 1)$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

第一讲 基本知识

二．矩阵和向量

1．线性运算与转置

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $c(A+B)=cA+cB \quad (c+d)A=cA+dA$

④ $c(dA)=(cd)A$

⑤ $cA=0 \Leftrightarrow c=0$ 或 $A=0$。

向量组的线性组合

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$，

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\Lambda+c_s\alpha_s$。

转置

A 的转置 A^T（或 A'）

$(A^T)^T=A$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(cA)^T=c(A^T)$。

3． n 阶矩阵

n 行、n 列的矩阵。

对角线，其上元素的行标、列标相等 a_{11},a_{22},Λ

对角矩阵 $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

数量矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=3E$

单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ E或I

上（下）三角矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

对称矩阵 $A^T=A$。

反对称矩阵 $A^T=-A$。

三．矩阵的初等变换，阶梯形矩阵

初等变换分 $\begin{cases} 初等行变换 \\ 初等列变换 \end{cases}$

三类初等行变换

①交换两行的上下位置

$A\to B$

②用非零常数 c 乘某一行。

③把一行的倍数加到另一行上（倍加变换）

阶梯形矩阵

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$

①如果有零行，则都在下面。

②各非零行的第一个非 0 元素的列号自上而下严格单调上升。

或各行左边连续出现的 0 的个数自上而下严格单调上升，直到全为 0 。

台角：各非零行第一个非 0 元素所在位置。

简单阶梯形矩阵：

3．台角位置的元素都为 1

4．台角正上方的元素都为 0。

每个矩阵都可用初等行变换化为阶梯形矩阵和简单阶梯形矩阵。

如果 A 是一个 n 阶矩阵

A 是阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ A 是上三角矩阵，反之不一定，如

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是上三角，但非阶梯形

四．线性方程组的矩阵消元法

用同解变换化简方程再求解

三种同解变换：

①交换两个方程的上下位置。

②用一个非 0 数 c 乘某一个方程。

③把某一方程的倍数加到另一个方程上去，它在反映在增广矩阵上就是三种初等行变换。

矩阵消元法：

①写出增广矩阵$(A|\beta)$，用初等行变换化$(A|\beta)$为阶梯形矩阵$(B|\gamma)$。

②用$(B|\gamma)$判别解的情况。

i）如果$(B|\gamma)$最下面的非零行为$(0,\cdots,0|d)$，则无解，否则有解。

ii）如果有解，记γ是$(B|\gamma)$的非零行数，则

$\gamma=n$时唯一解。

$\gamma<n$时无穷多解。

iii）唯一解求解的方法（初等变换法）

去掉$(B|\gamma)$的零行，得$(B_0|\gamma_0)$，它是$n\times(n+c)$矩阵，B_0是n阶梯形矩阵，从而是上三角矩阵。

$$B_0=\begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则$b_{nn}\neq 0 \Rightarrow b_{n-1n-1}\neq 0 \Rightarrow \cdots\ b_{ii}$都不为0。

于是把$(B_0|\gamma_0)$化出的简单阶梯形矩阵应为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_n \end{array}\right)$$

其方程为$\begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=c_2, \\ \quad\vdots \\ x_n=c_n, \end{cases}$ 即$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$就是解。

第二讲　行列式

一．形式与意义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A 是n阶矩阵，$|A|$表示相应的行列式。

二．定义（完全展开式）

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

一个n阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值：

①是$n!$项的代数和

②每一项是n个元素的乘积，它们共有$n!$项

$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个全排列。

③$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$前面乘的应为

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的逆序数

$1,2,\cdots,n$

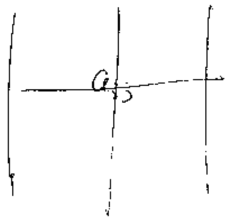
$$\left|\quad\quad\right|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ b_n & * & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

三．计算（化零降阶法）

余子式和代数余子式

$M_{ij} =$ 

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式。

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定理：一个行列式的值 D 等于它的某一行（列），各元素与各自代数余子式乘积之和。

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$

四．行列式的其它性质

1．转置值不变 $|A^T| = |A|$

2．用一个数 c 乘某一行（列）的各元素值乘 c

$$|cA| = c^n |A|$$

3．行列式和求某一行（列）分解

$$|\alpha, \beta_1 + \beta_2, \gamma| = |\alpha, \beta_1, \gamma| + |\alpha, \beta_2, \gamma|$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，3 阶矩阵

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

$$|A+B| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$$

$$= |\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3| + |\beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$$

4．第一类初等变换使值变号

5．如果一个行列式某一行（列）的元素全为 0 或者有两行（列）的元素成比例关系，则行列式的值为 0 。

6．一行（列）的元素乘上另一行（列）的相应元素代数余子式之和为 0 。

7．$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$

8．范德蒙行列

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i) \qquad C_n^2 \text{ 个}$$

五．元素有规律的行列式的计算

六．克莱姆法则

克莱姆法则：设线性方程组的系数矩阵 A 是 n 阶矩阵（即方程个数 m = 未知数个数 n），则

$|A| \neq 0$ 时，方程组唯一解，此解为

$$\left(\frac{D_1}{|A|}, \frac{D_2}{|A|}, \cdots, \frac{D_n}{|A|} \right)$$

D_i 是 $|A|$ 的第 i 列用 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 代替后所得 n 阶行列式：

$|A| = 0$ 时，解如何？

即唯一解 $\not\Rightarrow$ $|A| \neq 0$?

改进：$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 唯一解

证明：$(A|\beta) \xrightarrow{\text{行}} (B|r)$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$$

$$(B|r)=\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & * & * & * & \\ 0 & b_{22} & * & * & r \\ 0 & 0 & \ddots & * & \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} & \end{array}\right)$$

若 $|B|\neq 0$，则 $b_{ii}\neq 0,\forall_i$，故唯一解。

若唯一解，则 $(B\,|\,r)$ 有 n 个非零行，且最下面的非零行不是 $(0,\cdots,0\,|\,d)$ 于是 $b_{nn}\neq 0$，从而每 $b_{ii}\neq 0$。

$$|B|=\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\neq 0$$

求解方法：

$$(A|\beta)\xrightarrow{\text{行}}(B|r)\xrightarrow{\text{行}}(E|\eta)$$

η 就是解。

对于齐次方程组 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow$ 只有零解。

第三讲　矩阵

一．矩阵的乘法

1．定义与规律

定义：设 A 与 B 是两个矩阵

如果 A 的列数等于 B 的行数，则 A 可以乘 B，乘积也是一个矩阵，记作 AB。

当 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵时，AB 是 $m\times s$ 矩阵。

AB 的 (i,j) 位元素是 A 的第 i 行和 B 的第 j 列对应元素乘积之和。

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

遵循的规律

①线性性质

$$(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B,$$

$$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$$

$$(cA)B=c(AB)=A(cB)$$

②结合律 $(AB)C=A(BC)$

③ $(AB)^T=B^TA^T$

与数的乘法的不同之处

无交换律，无消去律

当 $AB=0$ 时 $\not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

由 $A\neq 0$ 和 $AB=0 \not\Rightarrow B=0$

由 $A\neq 0$ 时 $AB=AC \not\Rightarrow B=C$（无左消去律）

2．n 阶矩阵的方幂与多项式

任何两个 n 阶矩阵 A 与 B 可乘，并且 AB 仍是 n 阶矩阵。

行列式性质：$|AB|=|A||B|$

A 是 n 阶矩阵

$$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k个},\quad A^0=E$$

$$A^kA^l=A^{k+l}$$

$$\left(A^k\right)^l=A^{kl}$$

但是 $(AB)^k=A^kB^k$ 不一定成立！

设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

A 是 n 阶矩阵，规定

$$f(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

问题：数的乘法公式，因式分解等对矩阵是否仍成立？

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \qquad ?$$

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)\,?$$

$$\|$$

$$A^2+AB+BA+B^2$$

障碍是交换性

当 $AB=BA$ 时，$(A+B)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k-i}B^i$

一个矩阵 A 的每个多项式可以因式分解，例如

$$A^2-2A-3E=(A-3E)(A+E)$$

3．乘积矩阵的列向量与行向量

（1）设 $m\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$n$ 维列向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$$A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

$$\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1a_{11} & + & b_2a_{12} & + & b_3a_{13} \\ b_1a_{21} & + & b_2a_{22} & + & b_3a_{23} \\ b_1a_{31} & + & b_2a_{32} & + & b_3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=b_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3$$

应用于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 A 是系数矩阵，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n)$，设 $x=(x_1,\Lambda\ ,x_n)^T$，

$$\text{则 } Ax=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\Lambda\ +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\Lambda\ +a_{2n}x_n \\ \Lambda \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\Lambda\ +a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

方程组的矩阵形式

$Ax=\beta$，$\left(\beta=(b_1,b_2,\Lambda\ ,b_m)^T\right)$

方程组的向量形式

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\Lambda\ +x_n\alpha_n=\beta$

（2）设 $AB=C$，

记 $B=(\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_s)$，$C=(r_1,r_2,\Lambda\ ,r_s)$

则 $r_i=A\beta_i, i=1,2,\Lambda\ ,s$

或 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\Lambda\ ,A\beta_s)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \Lambda & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \Lambda & b_{2s} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b_{2n} & b_{n2} & \Lambda & b_{ns} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & , & \Lambda \\ c_{21} & , & \Lambda \\ \Lambda & , & \Lambda \\ c_{m1} & , & \Lambda \end{pmatrix}$$

于是 $r_i=A\beta_i=b_{1i}\alpha_1+b_{2i}\alpha_2+\Lambda\ +b_{ni}\alpha_n$

即 AB 的第 i 个列向量 r_i 是 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n$ 的线性组合，组合系数是 B 的第 i 个列向量的各分量。

类似地：AB 的第 i 个行向量是 B 的行向量组的线性组合，组合系数是 A 的第 i 个行向量的各分量。

$B^TA^T=C^T$

对角矩阵从右侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各列向量。

对角矩阵从左侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各行向量。

于是 $AE=A$，$EA=A$

$A(kE)=kA$，$(kE)A=kA$

两个对角矩阵相乘只须把对角线上对应元素相乘

对角矩阵的 k 次方幂只须把每个对角线上元素作 k 次方幂。

4．初等矩阵及其在乘法中的作用

对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵。

共有 3 种初等矩阵

（1）$E(i,j)$：交换 E 的第 i,j 两行或交换 E 的第 i,j 两列

$$n=5,\quad E(2,4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）$E(i(c))$：用数 $c(\neq 0)$ 乘 E 的第 i 行或第 i 列

$$n=5,\quad E(2(c))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）$E(i,j(c))$：把 E 的第 j 行的 c 倍加到第 i 行上，或把 E 的第 i 列的 c 倍加到第 j 列上。

$$n=5，\ E(1,4(c))=\begin{pmatrix}1&0&0&c&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

命题：初等矩阵从左（右）侧乘一个矩阵 A 等同于对 A 作一次相当的初等行（列）变换。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)E(1,4(c))$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\begin{pmatrix}1&0&0&c&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c\alpha_1+\alpha_4,\alpha_5)$$

5．矩阵分解

6．乘法的分块法则

一般法则：在计算两个矩阵 A 和 B 的乘积时，可以先把 A 和 B 用纵横线分割成若干小矩阵来进行，要求 A 的纵向分割与 B 的横向分割一致。

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}n_1&n_2&n_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c|c}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\\hline A_{21}&A_{22}&A_{23}\\\hline A_{31}&A_{32}&A_{33}\\\hline A_{41}&A_{42}&A_{43}\end{array}\right)\end{array}\quad \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{c|c|c}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\\hline B_{21}&B_{22}&B_{23}\\\hline B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{array}\right)&\begin{array}{c}n_1\\n_2\\n_3\end{array}\end{array}$$

两种常用的情况

（1） A,B 都分成 4 块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}，\ B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{i1} 的列数和 B_{1j} 的行数相等，A_{i2} 的列数和 B_{2j} 的行数相关。

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}A_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

（2）准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&0&\cdots&0\\0&B_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&B_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}B_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&&A_{kk}B_{kk}\end{pmatrix}$$

对一个 n 阶矩阵 A，规定 $tr(A)$ 为 A 的对角线上元素之和称为 A 的迹数。

于是 $(\alpha\beta^T)^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}\alpha\beta^T$

$$=[tr(\alpha\beta^T)]^{k-1}\alpha\beta^T$$

二．矩阵方程与可逆矩阵

1．两类基本的矩阵方程

$AB=C$ 若知道 C 和 A，B 中的一个，求另一个，这是乘法的逆运算。

两类基本矩阵方程

$(I)Ax=B$ $\qquad\qquad$ $(II)xA=B$

都需求 A 是方阵，且 $|A|\neq 0$

（I）的解法：

$$(A|B)\xrightarrow{\text{行}}(E|x)$$

（II）的解法，先化为 $A^Tx^T=B^T$。

$(A^T|B^T)\to(E|x^T)$。

2．可逆矩阵及其逆矩阵

当 $a\neq 0$ 时，$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$。

对 $ab=ac$ 两边乘 a^{-1}，得 $b=c$。

①定义与意义

设 A 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 H，使得 $AH=E$，且 $HA=E$，则称 A 是可逆矩阵，称 H 是 A 的逆矩阵，证作 A^{-1}。

设 A 可逆，则 A 有消去律。
左消去律：$AB = AC \Rightarrow B = C$。
右消去律：$BA = CA \Rightarrow B = C$。
②可逆性的判别，逆矩阵的计算

定理：n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

证明："$\Rightarrow$" $AA^{-1} = E$

$$|A||A^{-1}| = |E| = 1。$$

$\therefore |A|$ 不为 0，（且 $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$）。

"$\Leftarrow$" 要找 H，既是 $Ax = E$ 的解，又是 $xA = E$ 的解。

$|A| \neq 0$，$Ax = E$ 有唯一解，记作 B，$xA = E$ 也有唯一解，记作 C，则 $AB = E$，$CA = E$。

$$B = (CA)B = C(AB) = C$$

A 可逆，A^{-1} 即 $Ax = E$ 的解。

求 A^{-1} 的方程（初等变换法）

$$(A|E) \xrightarrow{\text{行}} (E|A^{-1})$$

推论 设 A，B 是两个 n 阶矩阵，则
$AB = E \Leftrightarrow BA = E$

③可逆矩阵的性质

i）当 A 可逆时，

A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。

A^k 也可逆，且 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$。

数 $c \neq 0$，cA 也可逆，$(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$。

$$|cA| = c^n |A| \neq 0$$

$$(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \left(c \cdot \frac{1}{c}\right)AA^{-1} = E。$$

ii）设 A，B 是两个 n 阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

当 A，B 都是 n 阶矩阵时

A，B 都可逆 $\Leftrightarrow AB$ 可逆

命题：初等矩阵都可逆，且

$$(E(i,j))^{-1} = E(i,j)$$

$$(E(i(c)))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$(E(i,j(c)))^{-1} = E(i,j(-c))$$

$|E(i,j(c))| = 1$。

命题：准对角矩阵 $A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{vmatrix}$ 可逆

$\Leftrightarrow$

每个 A_{ii} 都可逆，记

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk}^{-1} \end{vmatrix}$$

3．伴随矩阵

每个 n 阶矩阵 A 都有伴随矩阵，证作 A^*。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \Lambda & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \Lambda & A_{n2} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ A_{1n} & A_{2n} & \Lambda & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T$$

伴随矩阵的基本性质：

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

当 A 可逆时，

$$A\frac{A^*}{|A|}=E$$

得 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，

求逆矩阵的伴随矩阵法

当 $n=2$ 时：$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，

则 $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$$

要证　$A^*=|A|A^{-1}$

$$\frac{A}{|A|}A^*=E$$

得 $(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=(A^{-1})^*$

$$\left((A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{A}{|A|}\right)$$

伴随矩阵的其他性质

①$|A^*|=|A|^{n-1}$，

②$(A^T)^*=(A^*)^T$，

③$(cA)^*=c^{n-1}A^*$，

④$(AB)^*=B^*A^*$，

⑤$(A^k)^*=(A^*)^k$，

⑥$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$。

$n=2$ 时，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(A^*)^*=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$$

关于矩阵右上肩记号：T，k，-1，*

i) 任何两个的次序可交换，

如 $(A^T)^*=(A^*)^T$，

$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ 等

ii) $(AB)^T=B^TA^T,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，

$(AB)^*=B^*A^*$

（但 $(AB)^k=B^kA^k$ 不一定成立！）

小结：

1．乘法的定义，与数的乘法的区别

2．在特殊情形下怎么快捷地求乘积矩阵

3．矩阵分解的概念

4．矩阵方程的初等变换法

5．可逆矩阵

$Ax=B$，$x=A^{-1}B$

第四讲　向量组的线性关系和秩

一．线性表示

1．β 可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，即 β 可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，也就是存在 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=\beta$$

记号：$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

例如 $0\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　　$\alpha_i\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=\beta$ 有 解

$\left(x=\left(x_1,\Lambda\ ,x_s\right)^T\right)$

$Ax=\beta$ 有解，即 β 可用 A 的列向量组表示。

2．$\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$，即每个 $\beta_i\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$

如果 $AB=C=\left(r_1,r_2,\Lambda\ ,r_s\right)$，$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n\right)$，

则 $r_1,r_2,\Lambda\ ,r_s\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n$。

如果 $\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$，则存在矩阵 C，使得

$$\left(\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s\right)C$$

例如 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_2+3\alpha_3$，则

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

线性表示关系有传递性，即当

$\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t\rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s\rightarrow r_1,r_2,\Lambda\ ,r_p$，

则 $\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t\rightarrow r_1,r_2,\Lambda\ ,r_p$。

3．等价关系：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t$ 互相可表示

$$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s\rightleftarrows\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t$$

就称它们等价，记作 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s\cong\beta_1,\beta_2,\Lambda\ ,\beta_t$。

二．线性相关性

1．定义与意义

考察 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 的内在线性表示关系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

线性相关：存在向量 α_i 可用其它向量 $\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\Lambda\ ,\alpha_s$ 线性表示。

线性无关：每个向量 α_i 都不能用其它向量线性表示

定义：如果存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\Lambda\ ,c_s$，使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\Lambda\ +c_s\alpha_s=0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 线性相关，否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 线性无关。

例如 $c_1\neq0$，则 $c_1\alpha_1=-c_2\alpha_2-\Lambda\ -c_s\alpha_s$，

$$\alpha_1=-\frac{c_2}{c_1}\alpha_2-\Lambda\ -\frac{c_s}{c_1}\alpha_s。$$

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 线性无关，即当 $c_1\alpha_1+\Lambda\ +c_s\alpha_s=0$ 时必存 $c_1=\Lambda\ =c_s=0$。

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 线性相（无）关

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\Lambda\ +x_s\alpha_s=0$ 有（无）非零解

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s\right)x=0$ 有（无）非零解

$s=1$，即单个向量 α，$x\alpha=0$

α 相关 $\Leftrightarrow\alpha=0$

$s=2$，α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例

$$\alpha_1=\left(a_1,a_2,\Lambda\ ,a_n\right),\ \alpha_2=\left(b_1,b_2,\Lambda\ ,b_n\right)$$

α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\Lambda\ =a_n:b_n$

2．性质

①如果向量个数 s 二维数 n，则 $\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_n$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow\left|\alpha_1\Lambda\ \alpha_n\right|=(\neq)0$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n)$， $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

如果 $s>n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 一定相关。

$Ax=0$ 的方程个数 $n<$ 未知数个数 s

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 无关，则它的每一个部分组都无关。

例如若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 一定无关。

③如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s,\beta$ 相关，则

$$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$$

设 $c_1,\Lambda\ ,c_s,c$ 不全为 0，使得 $c_1\alpha_1+\Lambda\ +c_s\alpha_s+c\beta=0$

则其中 $c\neq0$，否则 $c_1,\Lambda\ ,c_s$ 不全为 0，$c_1\alpha_1+\Lambda\ +c_s\alpha_s=0$，与条件 $\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s$ 无关矛盾。于是 $\beta=-\dfrac{c_1}{c}\alpha_1-\Lambda\ -\dfrac{c_s}{c}\alpha_s$。

④当 $\beta\to\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s$ 时，表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\Lambda\ \alpha_s$ 无关，

（表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\Lambda\ \alpha_s$ 相关）

⑤若 $\beta_1,\Lambda\ ,\beta_t\to\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s$，并且 $t>s$，则 $\beta_1,\Lambda\ ,\beta_t$ 一定线性相关。

记 $A=(\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\Lambda\ ,\beta_t)$，则存在 $s\times t$ 矩阵 C，使得 $B=AC$。

$Cx=0$ 有 s 个方程，t 个未知数，$s<t$，有非零解 η，$C\eta=0$。

则 $B\eta=AC\eta=0$，即 η 也是 $Bx=0$ 的非零解，从而 $\beta_1,\Lambda\ ,\beta_t$ 线性相关。

各性质的逆否形式

①如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 无关，则 $s\le n$。

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 有相关的部分组，则它自己一定也相关。

③如果 $\alpha_1\Lambda\ \alpha_s$ 无关，而 $\beta\not\to\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s$，则 $\alpha_1,\Lambda\ ,\alpha_s\beta$ 无关。

⑤如果 $\beta_1\Lambda\ \beta_t\to\alpha_1\Lambda\ \alpha_s$，$\beta_1\Lambda\ \beta_t$ 无关，则 $t\le s$。

推论：若两个无关向量组 $\alpha_1\Lambda\ \alpha_s$ 与 $\beta_1\Lambda\ \beta_t$ 等价，则 $s=t$。

三．极大无关组和秩

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 可以有多大的线性无关的部分组？

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

1．定义

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$ 的一个部分组 (I) 称为它的一个极大无

关组，如果满足：

i）(I)线性无关。

ii）(I)再扩大就相关。

$$(I)\rightleftarrows\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \quad (II)\cong\alpha_1\cdots\alpha_s\cong(I)$$

规定$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\#(I)$。

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$每个元素都是零向量，则规定其秩为$0$。

$$0\le\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\le\min\{n,s\}$$

讨论： 设$\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=3$

①$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6$相关无关？

②α_1,α_2相关无关？

结论：一个线性无关部分组(I)，若$\#(I)$等于秩$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6\to(I)$，$(I)$就一定是极大无关组。

2．性质（应用）

①$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$无关$\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$。

②

$$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组$(I)$

(I)也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的极大无关组$\Leftrightarrow(I),\beta$相关。

$$\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\beta\to(I)\Leftrightarrow(I),\beta\text{ 相关。}$$

$$\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=\begin{cases}\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),\beta\to\alpha_1\cdots\alpha_s\\ \gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+1,\beta\not\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s\end{cases}$$

③ β 可用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 唯一表示$\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$

④

$$\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

$$\Rightarrow\gamma(\beta_1,\cdots,\beta_t)\le\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

⑤$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\cong\beta_1,\cdots,\beta_t\Leftrightarrow$

$$\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\gamma(\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1\cdots\beta_t)=\gamma(\beta_1,\cdots,\beta_t)$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩的计算方法：

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\xrightarrow{\text{行}}$阶梯形矩阵$B$

$\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=B$的非零行数。

3．有相同线性关系的向量组

两个向量若有相同个数的向量：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，并且向量方程

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 与 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$同解，则称它们有相同的线性关系。

①对应的部分组有一致的相关性。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的对应部分组$\beta_1,\beta_2,\beta_4$，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$相关，有不全为$0$的$c_1,c_2,c_4$使得

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_4\alpha_4=0$，

即 $(c_1,c_2,0,c_4,0,\cdots,0)$ 是 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$的解，

从而也是$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$的解，则有

$c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_4\beta_4=0$，

β_1,β_2,β_3也相关。

②极大无关组相对应，从而秩相等。

③有一致的内在线表示关系。

如$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4\Leftrightarrow\beta_3=3\beta_1+2\beta_2-\beta_4$。

设：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 即 $Ax=0$，

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$ 即 $Bx=0$。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 有相同的线性关系即 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

反之，当 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解时，A 和 B 的列向量组有相同的线性关系。

四．矩阵的秩

1．定义

A 是 $m\times n$ 矩阵

定理：矩阵 A 的行向量组的秩=列向量组的秩。

规定 $r(A)=$ 行（列）向量组的秩。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=C$$

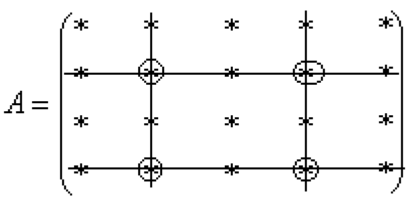
A 的行秩=C 的行秩

‖

A 的列秩=C 的列秩

$r(A)$的计算：用初等变换化 A 为阶梯形矩阵 B，则 B 的非零行数即 $r(A)$。

命题：$r(A)=A$ 的非零子式阶数的最大值。



2．矩阵的秩的简单性质

$0\le r(A)\le\min\{m,n\}$

$r(A)=0\Leftrightarrow A=0$

A 行满秩：$r(A)=m$

A 列满秩：$r(A)=n$

n 阶矩阵 A 满秩：$r(A)=n$

A 满秩 $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关

$\Leftrightarrow |A|\ne 0$

$\Leftrightarrow$ A 可逆

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解，$Ax=\beta$ 唯一解。

3．矩阵在运算中秩的变化

初等变换保持矩阵的秩

①$r(A^T)=r(A)$

②$c\ne 0$ 时，$r(cA)=r(A)$

③$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

④$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$

$AB=C=(r_1,r_2,\cdots,r_s)$

||

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

⑤A 可逆时，$r(AB)=r(B)$

B 可逆时，$r(AB)=r(A)$

$r(AB)\le r(B)$

$B=A^{-1}(AB)$，$r(B)\le r(AB)$

⑥若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$（A 的列数，B 的行数）

⑦A 列满秩时 $r(AB)=r(B)$

B 行满秩时 $r(AB)=r(A)$

⑧$r(AB)+n\ge r(A)+r(B)$

第五讲　线性方程组

一．方程组的表达形式

1． $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

2． $Ax = \beta$

η是解$\Leftrightarrow A\eta = \beta$

3． $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \Lambda + x_n\alpha_n = \beta$

有解$\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$

二．解的性质

1． $Ax = 0$的解的性质。

如果$\eta_1, \eta_2, \Lambda, \eta_e$是一组解，则它们的任意线性组合

$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \Lambda + c_e\eta_e$一定也是解。

$\forall_i, A\eta_i = 0 \Rightarrow A(c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \Lambda + c_e\eta_e) = 0$

2． $Ax = \beta(\beta \neq 0)$

①如果$\xi_1, \xi_2, \Lambda, \xi_e$是$Ax = \beta$的一组解，则

$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e$ 也 是 $Ax = \beta$ 的 解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \Lambda + c_e = 1$

$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e$ 是 $Ax = 0$ 的 解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \Lambda + c_e = 0$

$A\xi_i = \beta \cdot \forall i$

$$A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e) = c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \Lambda + c_eA\xi_e$$

$$= (c_1 + c_2 + \Lambda + c_e)\beta$$

当ξ_1, ξ_2是$Ax = \beta$的两个解时，$\xi_1 - \xi_2$是$Ax = 0$的解

②如果ξ_0是$Ax = \beta$的解，则n维向量ξ也是$Ax = \beta$的解$\Leftrightarrow \xi - \xi_0$是$Ax = 0$的解。

三．解的情况判别

$Ax = \beta$，即$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \Lambda + x_n\alpha_n = \beta$

有解$\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$

$\Leftrightarrow \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n, \beta) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n)$

$\Leftrightarrow \gamma(A|\beta) = \gamma(A)$

无解$\Leftrightarrow \gamma(A|\beta) > \gamma(A)$

唯一解$\Leftrightarrow \gamma(A|\beta) = \gamma(A) = n$

无穷多解$\Leftrightarrow \gamma(A|\beta) = \gamma(A) < n$

方程个数m：

$\gamma(A|\beta) \le m, \gamma(A) \le m$

①当$\gamma(A) = m$时，$\gamma(A|\beta) = m$，有解

②当$m < n$时，$\gamma(A) < n$，不会是唯一解

对于齐次线性方程组$Ax = 0$，

只有零解$\Leftrightarrow \gamma(A) = n$（即$A$列满秩）

（有非零解$\Leftrightarrow \gamma(A) < n$）

推论1　如果A列满秩，则A有左消去律，即

① $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

② $AB = AC \Rightarrow B = C$

证：①记$B = (\beta_1, \beta_2, \Lambda, \beta_s)$，则

$AB = (A\beta_1, \Lambda, A\beta_s)$，$AB = 0$即对每个$i$，$A\beta_i = 0$，

即β_i是$Ax = 0$的解。$Ax = 0$只有零解，故$\beta_i = 0$。

② $A(B - C) = 0$，$B - C = 0$。

推论2　如果A列满秩，则$\gamma(AB) = \gamma(B)$

证：下面证 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

η 是 $ABx=0$ 的解 $\Leftrightarrow AB\eta=0$

$\Leftrightarrow B\eta=0 \Leftrightarrow \eta$ 是 $Bx=0$ 的解

四．基础解系和通解

1． $Ax=0$ 有非零解时的基础解系

记 J 是 $Ax=0$ 的全部解的集合。
称 J 的极大无关组为 $Ax=0$ 的基础解系。

$\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件：

①每个 η_i 都是 $Ax=0$ 的解

② $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 线性无关

③ $Ax=0$ 的每个解 $\eta\to\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$

定理： $\gamma(J)=n-\gamma(A)$

$\gamma(J)+\gamma(A)=n$

$A\xrightarrow{行}$ 阶梯形矩阵 B

$\gamma(A)=B$ 的非零行数

$Bx=0$ 有 $\gamma(A)$ 个方程（除去 $J0=0$ ），因此有 $n-\gamma(A)$ 个自由未知量。

于是 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件③可换为

③′ $l=n-\gamma(A)$

证明：当 $AB=0$ 时， $\gamma(A)+\gamma(B)\le n$.

证：记 $B=(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s)$

$AB=0\Leftrightarrow$ 每个 β_i 都是 $Ax=0$ 的解

$\gamma(B)=\gamma(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s)\le\gamma(J)=n-\gamma(A)$

$\gamma(A)+\gamma(B)\le n$

2．通解

①如果 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=0$ 的通解为

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_e\eta_e$， c_i 任意

②如果 ξ_0 是 $Ax=\beta(\beta\ne0)$ 的一个解， $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=\beta$ 的通解为

$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_e\eta_e$， c_i 任意

第六讲　特征向量与特征值，相似与对角化

一．特征向量与特征值

设 A 是 n 阶矩阵， η 是 n 维非零列向量， $A\eta$ 与 η 是否相关？

例如： $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$， $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

1．定义：如果 $\eta\ne0$，并且 $A\eta$ 与 η 线性相关，则称 η 是 A 的一个特征向量。此时，有数 λ，使得 $A\eta=\lambda\eta$，称 λ 为 η 的特征值。

设 A 是数量矩阵 λE，则对每个 n 维列向量 η， $A\eta=\lambda\eta$，于是，任何非零列向量都是 λE 的特征向量，特征值都是 λ。

①特征值有限
特征向量无穷多

若 $A\eta=\lambda\eta$， $A(c\eta)=cA\eta=c\lambda\eta=\lambda(c\eta)$

$$\left.\begin{array}{l} A\eta_1=\lambda\eta_1 \\ A\eta_2=\lambda\eta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(c_1\eta_1+c_2\eta_2)=c_1A\eta_1+c_2A\eta_2=\lambda(c_1\eta_1+c_2\eta_2)$$

②每个特征向量有唯一特征值，而有许多特征向量有相同的特征值。

③计算时先求特征值，后求特征向量。

2．计算

A n 阶矩阵，求 A 的特征向量与特征值

$A\eta=\lambda\eta,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda E-A)\eta=0,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow$ η 是 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解

命题：①λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$

②η 是属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow$ η 是 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解

称多项式 $|xE-A|$ 为 A 的特征多项式。

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ 是 A 的特征多项式 $|xE-A|$ 的根。

λ 的重数：λ 作为 $|xE-A|$ 的根的重数。

n 阶矩阵 A 的特征值有 n 个：$\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$，可能其中有的不是实数，有的是多重的。

计算步骤：

①求出特征多项式 $|xE-A|$。

②求 $|xE-A|$ 的根，得特征值。

③对每个特征值 λ_i，求 $(\lambda_iE-A)x=0$ 的非零解，得属于 λ_i 的特征向量。

复杂，困难，不作一般的要求。

两种特殊情形：

（1）A 是上（下）三角矩阵，对角矩阵时，特征值即对角线上的元素。

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$|xE-A|=\begin{vmatrix} x-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x-\lambda_3 \end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

（2）$r(A)=1$ 时：A 的特征值为 $0,0,\Lambda,0,tr(A)$

3．特征值的性质

命题：n 阶矩阵 A 的特征值 λ 的重数 $\geq n-r(\lambda E-A)$

命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$，则

①$\lambda_1\lambda_2\Lambda\lambda_n=|A|$

②$\lambda_1+\lambda_2+\Lambda+\lambda_n=tr(A)$

$$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$$

比较两边的常数项部分得①

比较两边的 x^3 的系数得②：右边为 $-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$ 左边会 x^3 的项且有 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$，其系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})=-tr(A)$

4．与 A 相关的矩阵的特征向量与特征值

命题：设 η 是 A 的特征向量，特征值为 λ，即 $A\eta=\lambda\eta$，则

①对于 A 的每个多项式 $f(A)$，$f(A)\eta=f(x)\eta$

例如：$A\eta=AAA\eta=\lambda^3\eta$

$(2A+E)\eta = 2A\eta + \eta = (2\lambda+1)\eta$

$(A^5-4A^3+2A^2-E)\eta = (\lambda^5-4\lambda^3+2\lambda^2-1)\eta$

②当 A 可逆时，$A^{-1}\eta = \dfrac{1}{\lambda}\eta$，$A^*\eta = \dfrac{|A|}{\lambda}\eta$

$A\eta = \lambda\eta \Rightarrow \eta = \lambda A^{-1}\eta \Rightarrow A^{-1}\eta = \dfrac{1}{\lambda}\eta$

$|A|\eta = \lambda A^*\eta \Rightarrow A^*\eta \Rightarrow \dfrac{|A|}{\lambda}\eta$。

命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$，则

① $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\Lambda, f(\lambda_n)$

② A 可逆时，A^{-1} 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\Lambda,\dfrac{1}{\lambda_n}$

A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\Lambda,\dfrac{|A|}{\lambda_n}$

③ A^T 的特征值也是 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$

$|xE-A^T| = |(xE-A)^T| = |xE-A|$。

5．特征值的应用

①求行列式 $|A| = \lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$

②判别可逆性

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow A-\lambda E$ 不可逆

$A-\lambda E$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda$ 不是 A 的特征值。

当 $f(A)=0$ 时，如果 $f(c)\neq 0$，则 $A-cE$ 可逆

若 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值 $\Rightarrow f(\lambda)=0$。

$f(c)\neq 0 \Rightarrow c$ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow AcE$ 可逆。

二．n 阶矩阵的相似关系

设 A，B 是两个 n 阶矩阵。如果存在 n 阶可逆矩阵 U，使得 $U^{-1}AU=B$，则称 A 与 B 相似，记作 $A\sim B$。

当 $AU=UA$ 时，$B=A$，而 $AU\neq UA$ 时，$B\neq A$。

相似关系有 i）对称性：$A\sim B \Leftrightarrow B\sim A$

$U^{-1}AU=B$，则 $A=UBU^{-1}$

ii）有传递性：$A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$

$U^{-1}AU=B$，$V^{-1}BV=C$，则

$(UV)^{-1}A(UV) = V^{-1}U^{-1}AUV = V^{-1}BV = C$

命题　当 $A\sim B$ 时，A 和 B 有许多相同的性质

① $|A|=|B|$

$|B| = |U^{-1}AU| = |U^{-1}||A||U| = |A|$

② $\gamma(A)=\gamma(B)$

③ A，B 的特征多项式相同，从而特征值完全一致。

$|xE-B| = |xE-U^{-1}AU| = |U^{-1}(xE-A)U| = |xE-A|$

A 与 B 的特征向量的关系：η 是 A 的属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow U^{-1}\eta$ 是 B 的属于 λ 的特征向量。

$A\eta=\lambda\eta \Leftrightarrow B(U^{-1}\eta) = \lambda(U^{-1}\eta)$

χ　　　　　　χ

$U^{-1}A\eta = \lambda U^{-1}\eta \Leftrightarrow U^{-1}AUU^{-1}\eta = \lambda(U^{-1}\eta)$

三．n 阶矩阵的对角化

A 是否相似于一个对角矩阵？

不是每个矩阵都相似于对角矩阵的，例如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$。若 $U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=1$，则 $A=E$。

基本问题

①判别 n 阶矩阵 A 是否相似于对角矩阵（可对角化）

②实现问题，构造可逆矩阵 U，使 $U^{-1}AU$ 是对角矩阵

基本定理　A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

设可逆矩阵 $U=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&O&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_n)=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&O&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\Lambda,\lambda_n\eta_n)$$

$$\Leftrightarrow A\eta_i=\lambda_i\eta_i,\quad i=1,2,\Lambda,n$$

判别法则

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对于 A 的每个特征值 λ，λ 的重数 $=n-\gamma(\lambda E-A)$。

当 λ_i 是一重特征值时，重数 $1=n-r(\lambda_i E-A)$ 一定成立。只须对重数 >1 的特征值检查。

推论：如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定可对角化。对角化的实现（可逆矩阵 U 的构造）：

对每个特征值 λ_i，求出 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的一个基础解系，把它们合在一起，得到 n 个线性无关的特征向量，η_1,Λ,η_n。令 $U=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&O&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$，其中 λ_i 为 η_i 的特征值。

第七讲　二次型（实二次型）

一．基本概念

1．二次型及其矩阵

二次型是多个变量的二次齐次多项式函数。如

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+5x_2x_3$$

是一个三元二次型，它的每一项都是二次，或是一个变量的平方，称为平方项或是两个不同变量的乘积，称为交叉项。

一个 n 元二次型的一般形式为

$$f(x_1,x_2,\Lambda,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

只有平方项的二次型称为标准二次型。

形如：$x_1^2+x_2^2+\Lambda+x_p^2-x_{p+1}^2-\Lambda-x_{p+q}^2$ 的 n 元二次型称为规范二次型。

对每个 n 阶实矩阵 A，记 $x=(x_1,x_2,\Lambda,x_n)^T$，则 x^TAx 是一个二次型。

例如 $n=3$ 时，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$$

其中平方项的系数都是 A 的对角线上的元素，而交叉项 x_ix_j 的系数是 $a_{ij}+a_{ji}$。

我们可利用矩阵的形式来写出一个二次型，如把

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+5x_2x_3$$

写成 x^TAx 的形式，A 的对角线上的元素是确定的，依次为 $a_{11}=3$，$a_{22}=-2$，$a_{33}=1$，但对角线外的元素不是唯一确定的，只要满足。

$a_{12}+a_{21}=4$，$a_{13}+a_{31}=-6$，$a_{23}+a_{32}=5$，就可以。

我们要求 A 是一个对称矩阵，则它就是唯一确定的了。

称这个实对称矩阵 A 为该二次型的矩阵。

$$f(x_1,x_2,\Lambda,x_n)=x^TAx$$

称 A 的秩 $\gamma(A)$ 为这个二次型的秩。标准二次型的矩阵是对角矩阵。

2．可逆线性变量替换

椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

设有一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\Lambda,x_n)$，引进新的一组

变量 y_1, y_2, Λ, y_n，并把 x_1, x_2, Λ, x_n 用它们表示。

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \Lambda + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \Lambda + c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \Lambda \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \Lambda + c_{nn}y_n \end{cases}$$

（并要求矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \Lambda & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \Lambda & c_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ c_{n1} & c_{n2} & \Lambda & c_{nn} \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵）

代入 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$，得到 y_1, Λ, y_n 的一个二次型 $g(y_1, \Lambda, y_n)$ 这样的操作称为对 $f(x_1 \Lambda\ x_n)$ 作了一次可逆线性变量替换。

设 $Y = (y_1, y_2, \Lambda, y_n)^T$，则上面的变换式可写成

$x = CY$

则 $f(x_1 \Lambda\ x_n) = x^T Ax = Y^T C^T ACY = g(y_1, \Lambda, y_n)$

于是 $g(y_1, \Lambda\ y_n)$ 的矩阵为 $C^T AC$

$$(C^T AC)^T = C^T A^T C^T = C^T AC$$

3．实对称矩阵的合同

两个 n 阶实对称矩阵 A 和 B，如果存在 n 阶实可逆矩阵 C，值得 $C^T AC = B$。称 A 与 B 合同，记作 $A \simeq B$。

命题：二次型 $f(x_1 \Lambda\ x_n) = x^T Ax$ 可用可逆线性变换替换化为

$$g(y_1 \Lambda\ y_n) = Y^T BY \Leftrightarrow A \simeq B$$

二．二次型的标准化和规范化

1．每个二次型都可以用可逆线性变量替换化为标准二次型和规范二次型。

也就是每个实对称矩阵都会同于对角矩阵和规范对角矩阵。

设 A 是一个实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $D = Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵。

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = D$$

$A \sim D$，$A \simeq D$

2．标准化和规范化的方法

①正交变换法

② 配方法

3．惯性定理与惯性指数

定理　一个二次型用可逆线性变换替换化出的标准形的各个平方项的系数中，大于 0 的个数和小于 0 的个数是由原二次型所决定的，分别称为原二次型的正、负惯性指数。

一个二次型化出的规范二次型在形式上是唯一的，也即相应的规范对角矩阵是唯一的。

用矩阵的语言来说：一个实对称矩阵 A 会同于唯一规范对角矩阵。

二次型的正、负惯性指数在可逆线性变量替换下不变；两个二次型可互相转化的充要条件是它们的正、负惯性指数相等。

实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数。

三．正定二次型与正定矩阵

1．定义

一个二次型 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$ 称为正定二次型，如果当 x_1, Λ, x_n 不全为 0 时，$f(x_1, x_2, \Lambda, x_n) > 0$。

例如，标准二次型 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \Lambda + d_nx_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow d_i > 0$，$i = 1, \Lambda, n$

（必要性“$\Rightarrow$”，取 $x_1 = 1$，$x_2 = \Lambda = x_x = 0$，此时 $f(1, 0, \Lambda, 0) = d_1 > 0$ 同样可证每个 $d_i > 0$）

实对称矩阵正定即二次型 $x^T Ax$ 正定，也就是：当 $x \neq 0$ 时，$x^T Ax > 0$。

例如实对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ 正定

$\Leftrightarrow \lambda_i > 0$，$i = 1, \cdots, n$

2．性质与判别

可逆线性变换替换保持正定性。

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变为 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则它们同时正定或同时不正定。

$A \simeq B$，则 A，B 同时正定，同时不正定。

例如 $B = C^T AC$。如果 A 正定，则对每个 $x \neq 0$

$$x^T Bx = x^T C^T ACx = (Cx)^T ACx > 0$$

（C 可逆，$x \neq 0$，$\therefore Cx \neq 0$!）

我们给出关于正定的以下性质。

A 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$

$\Leftrightarrow$ 存在实可逆矩阵 C，$A = C^T C$。

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数 $= n$。

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0。

$\Leftrightarrow A$ 的每个顺序主子式全大于 0。

设 A 是一个 n 阶矩阵，记 A_r 是 A 的西北角的 r 阶小方阵，称 $|A_r|$ 为 A 的第 r 个顺序主子式（或 r 阶顺序主子式）。

判断 A 正定的三种方法：

①顺序主子式法。

②特征值法。

③定义法。

附录一　内积，正交矩阵，实对称矩阵的对角化

以下谈到的向量，矩阵都是在实数的范围中心，而向量的分量都是实数，矩阵的元素也都是实数。

一．向量的内积

1．定义

两个 n 维实向量 α, β 的内积是一个数，记作 (α, β)，规定为它们对应分量乘积之和。

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= \alpha^T \beta$$

2．性质

①对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

②双线性性质：$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$

$$(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$$

$$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

③正交性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

3．长度与正交

向量 α 的长度 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$

单位向量：长度为1的向量

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，

若 $\alpha \neq 0$，则 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量，称为 α 的单位化。

$$\left\| \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|} \|\alpha\| = 1$$

两个向量 α, β 如果内积为 0：$(\alpha, \beta) = 0$，称它们是

正交的。

如果 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交，并且每个都是单位向量，则称为单位正交向量组。

二．正交矩阵

一个实 n 阶矩阵 A 如果满足 $AA^T=E$，就称为正交矩阵。

$A^T=A^{-1}$

定理　A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行向量组是单位正交向量组。

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组是单位正交向量组。

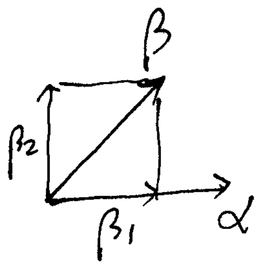
证：设 $A=(\alpha_1,a_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$A^TA=\begin{pmatrix} \|\alpha_1\|^2 & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & \|\alpha_2\|^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & & \|\alpha_n\|^2 \end{pmatrix}$$

于是 $A^TA=E \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是单位正交向量组。

三．施密特正交化方法

这是把一个线性无关的向量组改造为与之等价的单位正交向量组的方法。



$\beta_2=\beta-\beta_1=\beta-c\alpha$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

①正交化：令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

（设 $\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)-k(\beta_1,\beta_1)$

当 $k=\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}$ 时，β_2,β_1 正交。）

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

②单位化：令 $\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$，$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

则 η_1,η_2,η_3 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的单位正交向量组。

四．实对称矩阵的对角化

设 A 是一个实的对称矩阵，则

① A 的每个特征值都是实数。

②对每个特征值 λ，重数 $=n-r(\lambda E-A)$。即 A 可以对角化。

③属于不同特征值的特征向量互相正交。

于是：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵。

对每个特征值 λ，找 $(\lambda E-A)x=0$ 的一个单位正交基础的解，合在一起构造正交矩阵。

附录二　向量空间

1．n 维向量空间及其子空间

记为 R^n 由全部 n 维实向量构成的集合，这是一个规定了加法和数乘这两种线性运算的集合，我们把它称为 n 维向量空间。

设 V 是 R^n 的一个子集，如果它满足

（1）当 α_1,α_2 都属于 V 时，$\alpha_1+\alpha_2$ 也属于 V。

（2）对 V 的每个元素 α 和任何实数 c，$c\alpha$ 也在 V 中。

则称 V 为 R^n 的一个子空间。

例如 n 元齐次方程组 $AX=0$ 的全部解构成 R^n 的一个子空间，称为 $AX=0$ 的解空间。

但是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的全部解则不构成 R^n 的子空间。

对于 R^n 中的一组元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，记它们的全部线性组合的集合为

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s \mid c_i任意\}$，它

也是 R^n 的一个子空间。

2．基，维数，坐标

设 V 是 R^n 的一个非 0 子空间（即它含有非 0 元素），称 V 的秩为其维数，记作 $\dim V$ 。

称 V 的排了次序的极大无关组为 V 的基。

例如 $AX=0$ 的解空间的维数为 $n-r(A)$，它的每个有序的基础解系构成基。

又如 $\dim[L(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)]=r(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)$ ，$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 的每个有序的极大无关组构成基。

设 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 是 V 的一个基，则 V 的每个元素 α 都可以用 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 唯一线性表示：

$$\alpha=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_k\eta_k$$

称其中的系数 (c_1,c_2,Λ,c_k) 为 α 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标，它是一个 k 维向量。

坐标有线性性质：

（1）两个向量和的坐标等于它们的坐标的和：

如果向量 α 和 β 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标分别为 (c_1,c_2,Λ,c_k) 和 (d_1,d_2,Λ,d_k) ，则 $\alpha+\beta$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为

$$(c_1+d_1,c_2+d_2,\Lambda,c_k+d_k)=(c_1,c_2,\Lambda,c_k)+(d_1,d_2,\Lambda,d_k)$$

（2）向量的数乘的坐标等于坐标乘数：

如果向量 α 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为 (c_1,c_2,Λ,c_k)，则 $c\alpha$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为 $(cc_1,cc_2,\Lambda,cc_k)=c(c_1,c_2,\Lambda,c_k)$。

坐标的意义：设 V 中的一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_t$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标依次为 $\gamma_1,\gamma_2,\Lambda,\gamma_t$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_t$ 和 $\gamma_1,\gamma_2,\Lambda,\gamma_t$ 有相同的线性关系。

于是，我们可以用坐标来判断向量组的相关性，计算秩和极大无关组等等。

3．过渡矩阵，坐标变换公式

设 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 和 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 都是 V 的一个基，并设 ξ_1 在 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 中的坐标为 $(c_{1i},c_{2i},\Lambda,c_{ki})$，构造矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \Lambda & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \Lambda & c_{2k} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ c_{k1} & c_{k2} & \Lambda & c_{kk} \end{pmatrix},$$

称 C 为 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 到 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 的过渡矩阵。

$(\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k)=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)C$ 。

如果 V 中向量 α 在其 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 和 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 中的坐标分别为

$x=(x_1,x_2,\Lambda,x_k)^T$ 和 $y=(y_1,y_2,\Lambda,y_k)^T$，则

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)x$$

$$\alpha=(\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k)\,y=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)Cy$$

于是关系式：

$$x=Cy$$

称为坐标变换公式。

4．规范正交基

如果 V 的一基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 是单位正交向量组，则称为规范正交基。

两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积。

设 α 的坐标为 (c_1,c_2,Λ,c_k)， β 的坐标为 (d_1,d_2,Λ,d_k)，

则 $(\alpha,\beta)=c_1d_1+c_2d_2+\Lambda+c_kd_k$

两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵。