2002 年全国硕士研究生入学统一考试理工
数学二试题详解及评析

一、填空题

（1）　设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, x>0\\ ae^{2x} \quad , x\le 0\end{cases}$ 在 x＝0 处连续，则 a =_________.

【答】　－2

【详解】　因为

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^-} ae^{2x}=a,$$

由题设得　a = －2.

（2）　位于曲线 $y=xe^{-x}\left(0\le x<+\infty\right)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是_______.

【答】　1

【详解】　所求面积为

$$S=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=\int_0^{+\infty}(-x)de^{-x}$$
$$=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

（3）　微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是_________.

【答】　$y=\sqrt{x+1}$ 或 $y^2=x+1$

【详解】　方法一：

令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=0, \qquad 即\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y},$$

积分得

$$\ln p=-\ln y+C_1, \qquad 即 p\cdot y=e_1^C=C.$$

由 $y'(0)=\frac{1}{2}, y(0)=1,$ 　　得$C=\frac{1}{2}$

故有 $py=\frac{1}{2}$，即$\frac{dy}{dx}\cdot y=\frac{1}{2}, 2ydy=dx, y(0)=1,$

再次积分得

$$y^2=x+1\text{或}y=\sqrt{x+1}.$$

方法二：

$$yy''=y'^2=0 \Leftrightarrow yy'=C \Rightarrow y^2=C_1x+C_2,$$
$$y(0)=1 \Rightarrow C_2=1,$$
$$y'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow C_1=1,$$

所以，方程的解为　$y^2=x+1\text{或}y=\sqrt{x+1}.$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=$______.

【答】　$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}dx$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

（4）　矩阵$\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$的非零特征值是________.

【答】　4

【详解】　因为

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -2 & -2\\ -2 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-2\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4),$$

所以非零特征值为 $\lambda=4$.

二、选择题

（1）设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.01$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$

（A）－1　　　　（B）0.1　　　　（C）1　　　　（D）0.5

【 】

【答】　应选（D）

【详解】　由题设

$$\Delta y=y'(-1)\cdot\Delta x,\ \text{即} 0.1=y'(-1)\cdot(-0.1)$$

于是　$y'(-1)=-1,$

而由　$y=f(x^2),$　　有 $y'=2xf'(x^2)$

令 $x=-1,$　　得 $y'(-1)=-2f'(1)$

即　$f'(1)=\dfrac{1}{2}=0.5.$

（2）设函数 f (x) 连续，则下列函数中，必为偶函数的是

$(A)\int_0^x f(t^2)dt$　　　　$(B)\int_0^x f^2(t)dt$

$(C)\int_0^x t\left[f(t)-f(-t)\right]dt$　　　　$(D)\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$

【 】

【详解】　$F(x)\int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性与 f (x) 的奇偶性的关系是：若 f (x)为偶函数，则 F(x) 为奇函数；若 f (x)为奇函数，则 F (x) 为偶函数.题设四个选项中，$t\left[f(t)+f(-t)\right]$ 为奇函数，故 $\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$ 必为偶函数.

(3)　设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

（A）不存在　　　（B）等于 1　　　（C）等于 2　　　（D）等于 3

【 】

【答】　应选（C）

【详解】　由　$y''+py+qy=e^{3x}$ 及 $y(0)=y'(0)=0$，知 $y''(0)=1.$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2.$$

（4）设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0;$

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0;$

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0;$

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$。

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 方法一：

取 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，并且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

$$f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2},$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}\right)$ 不存在，可排除（A）.

又取 $f(x)=\sin x$, 在$(0,+\infty)$内有界且可导，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1,$ 可排除（C）、（D）.

故正确选项为（B）.

方法二 ：

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq0,$ 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l>0,$ 从而存在X>0，当x>X时，有

$$f'(x)>\frac{l}{2},$$

对任意 $x>X+1,$ 在 $[X+1,x]$ 上由拉个朗日定理得

$$f(x)-f(X+1)=f'(\xi)(x-X-1),X+1<\xi<x,$$

从而 $$f(x)-f(X+1)>\frac{l}{2}(x-X+1),$$

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty,$ 与$f(x)$有界矛盾，故必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0,$

因而应选（B）.

（5）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则对于任意常数k，必有

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关； （B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关； （D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

【 】

【答】 应选（A）

【详解 1】

由题设知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$线性无关，且存在$k_1,k_2,k_3$使

$$\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

于是通过列初等变换有

$$\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,k\beta_1+\beta_2\right)=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,kk_1\alpha_1+kk_2\alpha_2+kk_3\alpha_3+\beta_2\right)$$
$$\to\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\beta_2\right)$$

因此秩

$$r\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,k\beta_1+\beta_2\right)=r\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\beta_2\right)=4,$$

故 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关.

【详解 2】

取$k=0$,由条件知向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\beta_1$线性相关，所以应排除（B）、（C）.

取$k=1$，因β_1可由$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$线性表出,$\beta_2$不能由$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$线性表出，

所以$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1+\beta_2$线性无关，因而可排除（D）.

故应选（A）.

三、已知曲线的极坐标方程是$r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于$\theta=\frac{\pi}{6}$处的切线与法线的直角坐标方程.

【详解】 此曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\left(1-\cos\theta\right)\cos\theta\\ y=\left(1-\cos\theta\right)\sin\theta\end{cases}\quad 即\begin{cases}x=\cos\theta-\cos^2\theta\\ y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

由$\theta=\frac{\pi}{6}$,得切点的坐标$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1.$$

于是所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4},\text{即}x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0.$$

法线方程为

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right),\text{即}x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0.$$

四、设

$$f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\le x<0,\\ \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$$

求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ 的表达式.

【详解】　当 $-1\le x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\left.\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\right|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}$$

当 $0\le x\le 1$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$$

$$=\left.\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\right|_{-1}^{0}+\int_0^x\frac{te^t}{\left(e^t+1\right)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x td\left(\frac{1}{e^t+1}\right)=-\frac{1}{2}-\left.\frac{t}{e^t+1}\right|_0^x+\int_0^x\frac{dt}{e^t+1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{de^t}{e^t\left(e^t+1\right)}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\left.\frac{e^t}{e^t+1}\right|_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2.$$

所以 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}, & -1\le x<0\\ -\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2, & 0\le x\le 1\end{cases}$

五、 已知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$..

【详解】 设 $y=\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}$,

则 $$\ln y=\frac{1}{h}\frac{f(x+hx)}{f(x)}.$$

因为

$$\lim_{h\to 0}\ln y=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+hx)}{f(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{x\left[\ln f(x+h)x-\ln f(x)\right]}{hx}=x\left[\ln f(x)\right]',$$

故 $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{x\left[\ln f(x)\right]'}.$$

由已知条件得

$$e^{x\left[\ln f(x)\right]'}=e^{\frac{1}{x}},$$

因此 $x\left[\ln f(x)\right]'=\dfrac{1}{x}$, 即$\left[\ln f(x)\right]'=\dfrac{1}{x^2}$

解得 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 得$C=1$,

故 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

六、 求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$的一个解$y=y(x)$,使得由曲线$y=y(x)$， 与直线 $x=1, x=2$以及x轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

【详解】 原方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=-1.$$

所以 $$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[-e^{-\int\frac{2}{x}dx}+C\right]=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right)=x+Cx^2.$$

由曲线 $y=x+Cx^2$ 与直线 $x=1, x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V(C)=\int_1^2\pi\left(x+Cx^2\right)^2dx=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right).$$

令 $$V'(C)=\pi\left(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2}\right)=0, \text{得} C=-\frac{75}{124}.$$

又 $$V''(C)=\frac{62}{5}\pi>0,$$

故 $C=-\frac{75}{124}$ 为唯一极小值点，也是最小值点，

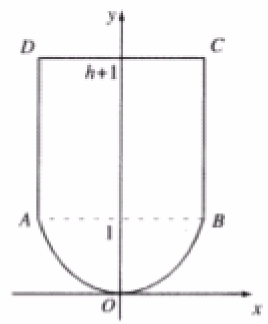
于是得 $$y=y(x)=y-\frac{75}{124}x^2.$$

七、某闸门的性状与大小如图硕士，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 ABCD，下部由二次抛物线与线段ＡＢ所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)？

【详解】 方法一：

如图一建立坐标系，则抛物线的方程为

$$y=x^2$$



闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g\left(h+1-y\right)dy$$
$$=2\rho g\left[\left(h+1\right)y-\frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1}$$
$$=\rho gh^2$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

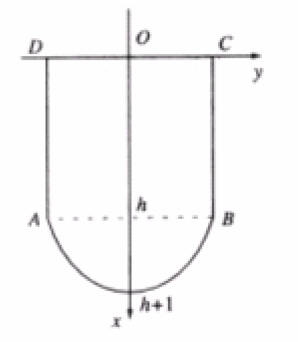
闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g\left(h+1-y\right)\sqrt{y}dy$$
$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}\left(h+1\right)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题意知

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4},\qquad 即\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4},$$

解得 $h=2, h=-\frac{1}{3}$(舍去)



故 $h=2$.

即闸门矩形部分的高应为 2m.

方法二：

如图二建立坐标系，则抛物线方程为

$$x=h+1-y^2$$

闸门矩阵部分承受的水压力为

$$P_1=2\int_0^h \rho gx dx=\rho gh^2$$

$$P_2=2\int_h^{h+1}\rho gx\sqrt{h+1-x}dx$$

设 $\sqrt{h+1-x}=t$，得

$$P_2=4\rho g\int_0^1\left(h+1-t^2\right)t^2dt=4\rho g\left[\left(h+1\right)\frac{t^2}{3}-\frac{t^2}{5}\right]_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

以下同方法一.

八、设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}\left(n=1,2,\cdots\right)$,证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

【详解】 由 $0<x_1<3$ 知 $x_1, 3-x_1$ 均为正数，

故 $$0<x_2=\sqrt{x_1\left(3-x_1\right)}\le\frac{1}{2}\left(x_1+3-x_1\right)=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\le\frac{3}{2}\quad\left(k>1\right)$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k\left(3-x_k\right)}\le\frac{1}{2}\left(x_k+3-x_k\right)=\frac{3}{2}.$$

由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$,均有 $0<x_n\le\frac{3}{2}$,因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n>1$ 时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}-x_n=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x_n}\left(3-2x_n\right)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0$$

因而有 $x_{n+1} \ge x_n \left(n>1\right)$,即数列$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界数列必有极限，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,在$x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}$两边取极限，

得 $a=\sqrt{a\left(3-a\right)}$,

解得 $a=\dfrac{3}{2}$, $a=0\left(\text{舍去}\right)$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{3}{2}$.

九、设$0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

【详解】 方法一：

先证右边不等式，即 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$

设 $\varphi\left(x\right)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}\left(x>a>0\right)$,

因为 $\varphi'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)^2}{2x\sqrt{ax}}<0$,

故当 $x>a$时，$\varphi\left(x\right)$单调减少，又$\varphi\left(a\right)=0$,

所以，当$x>a$时，$\varphi\left(x\right)<\varphi\left(a\right)=0$,

即 $\ln x-\ln a<\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}$,

从而当 $b>a>0$ 时，有

$$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},$$

即 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

再证左边不等式，即

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$$

设函数 $f\left(x\right)=\ln x \qquad (x>a>0)$,

由拉个朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},$$

由于 $0<a<\xi<b$，故

$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2},$$

从而
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

方法二：

右边的不等式证明同方法一，下面证左边的不等.

设 $\qquad f\left(x\right)=\left(x^2+a^2\right)\left(\ln x-\ln a\right)-2a(x-a) \qquad \left(x>a>0\right)$,

因为

$$\begin{aligned} f'\left(x\right)&=2x\left(\ln x-\ln a\right)+\left(x^2+a^2\right)\frac{1}{x}-2a \\ &=2x\left(\ln x-\ln a\right)+\frac{\left(x-a\right)^2}{x}>0 \end{aligned}$$

故当 $x>a$时，$f\left(x\right)$单调增加，又$f\left(a\right)=0$,

所以当$x>a$时，$\quad f\left(x\right)>f\left(a\right)=0$,

即
$$\left(x^2+a^2\right)\left(\ln x-\ln a\right)-2a(x-a)>0.$$

从而当 $b>a>0$ 时，有

$$\left(a^2+b^2\right)\left(\ln b-\ln a\right)-2a(b-a)>0,$$

即
$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$$

十、函数 $\mathrm{f(x)}$ 在 $\mathrm{x=0}$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\quad f\left(0\right)\neq 0, f'\left(0\right)\neq 0, f''\left(0\right)\neq 0.$

证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得当$h\to 0$时，

$\lambda_1 f\left(h\right)+\lambda_2 f\left(2h\right)+\lambda_3 f\left(3h\right)-f\left(0\right)$是比$h^2$ 高阶的无穷小.

【详解】 方法一：

只需证存在唯一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,$，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由题设和洛必达法则，从

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}\\&=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)\end{aligned}$$

知$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,$应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以上述方程组的解存在且唯一，即存在唯一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,$，使得当$h\to 0$时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

方法二：

由麦克劳林公式得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2\qquad(\text{其中}\xi\text{介于}0\text{与}h\text{之间}),$$

由题设条件，使得当$h\to 0$时，有

$$\begin{aligned}f(h)&=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+\frac{1}{2}\left[f''(\xi)-f''(0)\right]h^2\\&=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

同理可得

$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+2f''(0)h^2+o(h^2),$$
$$f(3h)=f(0)+3f'(0)h+\frac{9}{2}f''(0)h^2+o(h^2),$$

故有

$$\begin{aligned}&\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)\\&\qquad=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+\\&\qquad\quad\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

所以$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,$应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

以下同方法一.

十一、 已知 A，B 为 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E,$其中E是3阶单位矩阵.

（1） 证明：矩阵 A－2E 可逆；

（2） 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 求矩阵 A.

【详解】 （1）由 $2A^{-1}B=B-4E$，知 $AB-2B-4A=0,$

从而 $(A-2E)(B-4E)=8E,$

或 $(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E.$

故 $A-2E$ 可逆，且

$$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E).$$

（2） 由（1）知 $A=2E+8(B-4E)^{-1},$

而 $$(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

故 $$A=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

十二、已知 4 阶方阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$,如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$的通解.

【详解】 方法一：

$$令\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},则由Ax=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\beta$$

得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

将$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 代入上式整理后得

$$\left(2x_1+x_2-3\right)\alpha_2+\left(-x_1+x_3\right)\alpha_3+\left(x_4-1\right)\alpha_4=0$$

由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\-x_1+x_3=0,\\x_4-1=0.\end{cases}$$

解此方程组得

$$x=\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},其中k为任意常数.$$

方法二：

由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关和$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$,故 A 的秩为 3，因此 Ax＝0 的基础解系中只包含一个向量.

由$\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4=0$知$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$为齐次线性方程组 Ax＝0 的一个解，

所以其通解为

$$x = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{其中}k\text{为任意常数.}$$

再由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

知$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$为非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解，于是 $Ax = \beta$ 的通解为：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{其中}k\text{为任意常数.}$$