# 2000 年全国硕士研究生入学统一考试

# 理工数学二试题详解及评析

## 一、　　填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}=$______.

【答】　$-\dfrac{1}{6}$.

【详解】　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2\left(1+x^2\right)}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$______.

【答】　$(\ln 2-1)dx$

【详解】　方法一：

根据微分形式不变性，在已知等式两边同时求微分，得

$$2^{xy}\left(ydx+xdy\right)\ln 2=dx+dy$$

由原方程知，当 $x=0$ 时，$y=1$，将其代入上式，得

$$\ln 2dx-dx=dy,$$

即有　　$dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx,$

方法二：

在方程 $2^{xy}=x+y$ 两边对 $x$ 求导，得

$$2^{xy}\ln 2\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=1+\frac{dy}{dx}$$

将 $x=0$ 代入原方程得 $y=1$，将 $x=0$，$y=1$代入上式有：

$$\ln 2(1+0)=1+\frac{dy}{dx}$$

即有 $$\frac{dy}{dx}=\ln 2-1$$

所以 $$dy\big|_{x=0}=\left(\ln 2-1\right)dx,$$

(3) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+7\right)\sqrt{x-2}}=$_____.

【答】 $\frac{\pi}{3}$

【详解】 令 $\sqrt{x-2}=t,$ 则 $x=t^2+2,dx=2tdt,$ 于是

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+7\right)\sqrt{x-2}}=\int_{0}^{+\infty}\frac{2tdt}{\left(t^2+9\right)t}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{2dt}{t^2+9}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_{0}^{b}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

(4) 曲线 $y=\left(2x-1\right)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

【答】 $y=2x+1$

【详解】 因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-e^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right]=1$$

故渐近线方程为

$$y=2x+1$$

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$, $E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=\left(E+A\right)^{-1}\left(E-A\right)$,则 $\left(B+E\right)^{-1}$

=_____.

【答】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

【详解】 由 $B=\left(E+A\right)^{-1}\left(E-A\right)$，有

$$\left(E+A\right)B=E-A$$

即

$$\begin{aligned} &AB+A+B+E=2E, \\ &\left(E+A\right)\left(E+B\right)=2E, \end{aligned}$$

也即 $$\frac{1}{2}\left(E+A\right)\left(E+B\right)=E,$$

故

$$\left(B+E\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(E+A\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

**二、选择题**

（1）设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$，则常数 $a,b$ 满足

（A） $a<0,b<0$　　　（B） $a>0,b>0$

（C） $a\le 0,b>0$　　　（D） $a\ge 0,b<0$

【 】

【答】 应选（D）

【详解】 由题设，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，因此对任意的 $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$，有，，这只需 $a\ge 0$ 即可.

另外，由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$ 知， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+e^{bx}\right)=\infty$

所以必有 $b<0$

故正确答案为（D）

（2）设函数 $f\left(x\right)$ 满足关系式 $f''\left(x\right)+\left[f'\left(x\right)\right]^2=x$，且 $f'\left(0\right)=0$，则

（A） $f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值

（B） $f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值

（C）点$\left(0, f\left(0\right)\right)$是曲线$y = f\left(x\right)$的拐点

（D）$f\left(0\right)$不是$f\left(x\right)$的极值，点$\left(0, f\left(0\right)\right)$不是曲线$y = f\left(x\right)$的拐点

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 因为$f^{'}\left(0\right)=0$，由原关系式

$$f^{''}\left(x\right)+\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}=x,$$

知$f^{''}\left(0\right)=0,$因此点$\left(0, f\left(0\right)\right)$可能为拐点.

由$f^{''}\left(x\right)=-\left[f^{'}\left(x\right)\right]^{2}=x,$

知$f\left(x\right)$的三阶导数存在，且

$$f^{'''}\left(x\right)=-2f^{'}\left(x\right)f^{''}\left(x\right)+1$$

可见$f^{'''}\left(0\right)=1$

因此在$x=0$的左侧，$f^{''}\left(x\right)<0$，对应曲线是下凹（上凸）的；而在$x=0$的右侧，$f^{''}\left(x\right)>0$，对应曲线是上凹（上凸）的.

故点$\left(0, f\left(0\right)\right)$是曲线$y = f\left(x\right)$的拐点

（3）设函数$f\left(x\right),g\left(x\right)$是大于零的可导函数，且$f^{'}\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g^{'}\left(x\right)<0,$则当$a<x<b$时，有

（A）$f\left(x\right)g\left(b\right)>f\left(b\right)g\left(x\right)$ （B）$f\left(x\right)g\left(a\right)>f\left(a\right)g\left(x\right)$

（C）$f\left(x\right)g\left(x\right)>f\left(b\right)g\left(b\right)$ （C）$f\left(x\right)g\left(x\right)>f\left(a\right)g\left(a\right)$

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】 由题设知

$$\left[\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right]^{'}=\frac{f^{'}\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)^{'}g\left(x\right)}{g^{2}\left(x\right)}<0$$

因此当$a<x<b$时，有

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}>\frac{f\left(b\right)}{g\left(b\right)},$$

即 $$f\left(x\right)g\left(b\right)>f\left(b\right)g\left(x\right)$$

可见（A）为正确选选项.

（4）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

（A）0　　　　（B）6　　　　（C）36　　　　（D）$\infty$

【 】

【答】　应选（C）

【详解】　方法一：

因为 $\sin 6x=6x-\dfrac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$

所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]$$

$$=0$$

可见 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ ＝36

方法二：

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xy(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6+f(x)}{x^2}\right]$$

$$=0$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{-12\sin 6x}{2x}=36$$

（5）具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的 3 阶常系数齐次微分方程是

（A） $y'''-y''-y'+y=0$　　　　（B） $y'''+y''-y'-y=0$

（C） $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　　　（D） $y'''-2y''-y'+2y=0$

【 】

【答】　应选（B）

【详解】　由特解知，对应特征方程的根为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=1$$

于是特征方程为

$$(\lambda+1)^2(\lambda-1)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$$

故所求线性微分方程为

$$y'''+y''-y'-y=0$$

可见正确选项为（B）

三、设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x)dx.$

【详解】设 $\ln x=t,$ 则 $x=e^t$，于是

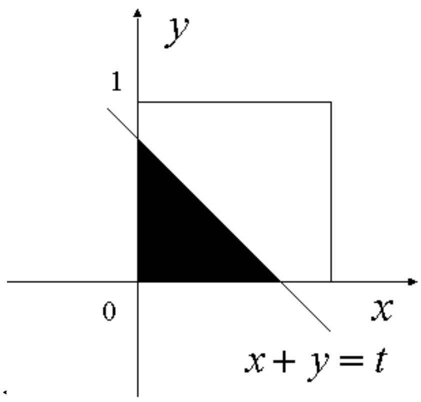
$$f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t},$$

从而

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}\\&=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1}{1+e^x}dx=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx\\&=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C\\&=x-(1+e^x)\ln(1+e^x)+C\end{aligned}$$

四、设 $xOy$ 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 及直线 $l:x+y=t\,(t\ge 0)$ 若 $S(t)$ 表示正方形 $D$ 位于直线 $l$ 的左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)dt\,(x\ge 0).$

【详解】




根据题设，有

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2,0:\\-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1,1<t\le 2\\1,t>2\end{cases}$$

可见，当$0\le x\le 1$时，

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}t^2dt=\frac{1}{6}x^3;$$

当$1<x\le 2$时

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}t^2dt+\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^2+2t-1\right)dt$$
$$=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}$$

当$x>2$时，

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^x S(t)dt=x-1$$

因此

$$\int_0^x S(t)\,dt=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3,0\le x\le 1,\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3},1<x\le 2\\ x-1,x>2\end{cases}$$

**五、**求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的$n$阶导数$f^{(n)}(0)(n\ge 3)$

【详解】方法一：

由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

及

$$x^2\ln(1+x)=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots\right]$$
$$=x^3-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots$$

比较$x^n$的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{(n-1)}}{n-2}$$

所以 $$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{(n-1)}n!}{n-2}$$

方法二：

由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^{\,1}u^{(n-1)}v' + C_n^{\,2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $\left[\ln(1+x)\right]^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$（$k$ 为正整数）

得 $f^{(n)}(x) = x^2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

于是可得

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$$

六、设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t|dt,$

（1） 当 $n$ 为正整数，且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$;

（2） 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$

【详解】

（1）当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，主义到被积函数是非负得，于是有

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx \le S(x) < \int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 $\pi$ 为周期的函数，在每一个周期上积分值相等

所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx = n\int_0^{\pi}|\cos x|dx = 2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx = (n+1)\int_0^{n\pi}|\cos x|dx = 2(n+1)$$

因此当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，有

$$2n \le S(x) < 2(n+1);$$

（2）由（1）知，当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

当 $x\to+\infty$，有 $n\to\infty$，根据夹逼定理得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$$

七、某湖泊的水量为$V$, 每年排入湖泊内含污染物$A$的污水量为$\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含$A$的污水量为$\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为$\frac{V}{3}$，已知 1999 年底湖中$A$的含量为$5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2000 年初起，限制排入湖泊中含$A$污水的浓度不超过$\frac{m_0}{V}$.问至多需要经过多少年，湖泊中污染物$A$的含量才可降至$m_0$以内？（注：设湖水中$A$的浓度时均匀的）

【详解】设从 2000 年初（令此时，$t=0$）开始，第七年湖泊中污染物$A$的总量为$m(t)$，浓度为$\frac{m}{V}$,

则在时间间隔$[t,t+dt]$上，排入湖泊中$A$的量近似为$\frac{m_0}{V}.\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt$, 排除量近似为$\frac{m}{V}.\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$,

因此在时间间隔$[t,t+dt]$上$m(t)$的改变量为

$$dm=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)dt$$

这是可分离变量方程，解得

$$m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}$$

代入初始条件$m(0)=5m_0$，得

$$C=-\frac{9}{2}m_0$$

于是$m=\frac{m_0}{2}\left(1+9e^{-\frac{t}{3}}\right)$，令$m=m_0$，得

$$t=6\ln 3$$

即至多需要经过$6\ln 3$年，湖泊中污染物$A$的含量才可降至$m_0$以内.

八、设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0,$试证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

【详解】 方法一：

令 $F(x)=\int_0^{\pi} f(t)dt,$ 则有

$$F(0)=0, F(\pi)=0$$

又因为

$$0=\int_0^{\pi} f(t)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$$
$$=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$$

令 $G(x)=\int_0^{\pi}F(t)\sin tdt$

则 $G(0)=G(\pi)=0,$ 于是存在 $\xi\in(0,\pi)$，使

$$F(\xi)\sin\xi=0.$$

因为当 $\xi\in(0,\pi)$，$\sin\xi\neq 0$，所以有 $F(\xi)=0$，这样九证明了

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$$

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔中值定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$，使得

$$F^{'}(\xi_1)=F^{'}(\xi_2)=0,$$

即 $$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0,$$

方法二：

令 $F(x)=\int_0^{\pi} f(t)dt,$ 则有

$$F(0)=0, F(\pi)=0$$

由罗尔中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$ 使得

$$F^{'}(\xi_1)=f(\xi_1)=0,$$

若在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一个实数根 $x=\xi_1$，

则由 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0$ 可知，$f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 内与 $(\xi_1,\pi)$ 内异号.

不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，于是再由 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0,\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0,$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性知：

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx \\
&= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx > 0
\end{aligned}
$$

矛盾，从而推知，在$(0,\pi)$内除$\xi_1$外，$f(x)=0$至少还有另一实数根$\xi_2$，

故知存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

九、已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数，它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+a(x)$$

其中$a(x)$是当$x\to 0$时比$x$高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

【详解】 由$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+a(x)$两边取极限，得

$$\lim_{x\to 0}\left[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[8x+a(x)\right]$$

即有 $f(1)-3f(1)=0,$

于是得 $f(1)=0,$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{a(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8$$

可见

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x} \\
&= f'(1)+3f'(1) \\
&=4f'(1)=8
\end{aligned}
$$

故 $f'(1)=2$

由于$f(x+5)=f(x),$

所以 $f(6)=f(1)=0$

又$f'(1)$存在，所以$f'(6)$也存在，且$f'(6)=f'(1)=2$

故所求得切线方程为

$$y=2(x-6)$$

即 $$2x-y-12=0$$

十、设曲线 $y=ax^2\left(a>0,x\geq 0\right)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 $A$, 过坐标原点 $O$ 和点 $A$ 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 $a$ 为何值时，该图形绕 $x$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大？

【详解】当 $x\geq 0$ 时，由 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases}$，解得

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+a}},y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}$$

故直线 $OA$ 的方程为：

$$y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}$$

于是旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx \\ &=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da}&=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5} \\ &=\frac{\pi\left(4a-a^2\right)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}(a>0) \end{aligned}$$

令 $\frac{dV}{da}=0,$ 并由 $a>0$，得唯一驻点 $a=4$

由题意知，此旋转体在 $a=4$ 时取最大值，其最大体积为

$$V=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{16}{5^{\frac{5}{2}}}=\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$$

十一、函数 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right]$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0.$$

（1） 求导数 $f'(x)$；

（2） 证明：当 $x\geq 0$ 时，不等式 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

【详解】

（1） 由题设知

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0.$$

上式两边对 $x$ 求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

即 $$\frac{df'(x)}{f'(x)}=-\frac{x+2}{x+1}dx$$

两边积分，得

$$\ln f'(x)=-x+\ln(x+1)+\ln C$$

在题设等式中令 $x=0$，得 $f'(0)+f(0)=0$

又 $f(0)=1$，于是 $f'(0)=-1$，

代入 $f'(x)$ 的表达式，得 $C=1$, 故有

$$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$$

（2）方法一：

当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 单调减少，又 $f(0)=1$，所以

$$f(x)\leq f(0)=1.$$

设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$, 则

$$\varphi(0)=0,\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{x}{x+1}e^{-x},$$

当 $x\geq 0$ 时，$\varphi'(x)\geq 0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，

因而 $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0,$

即有

$$f(x)\geq e^{-x},$$

综上所述，当 $x\ge 0$ 时，不等式有 $e^{-x}\le f\left(x\right)\le 1.$

方法二：

因 $\int_0^x f^{'}\left(t\right)dt=f\left(x\right)-f\left(0\right)=f\left(x\right)-1$

将 $f^{'}\left(x\right)$ 代入，

得 $$f\left(x\right)=1-\int_0^x\frac{e^{-x}}{1+t}dt.$$

又 $x\ge 0$ 时， $$0\le\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+t}dt\le\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}.$$

所以 $e^{-x}\le f\left(x\right)\le 1.$

**十二、**设 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix},A=\alpha\beta^T,B=B^T\alpha$ ,其中 $\beta^T$ 是 $\beta$ 的转置，求解方程

$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma.$

【详解】 由题设，有

$$A=\alpha\beta^T\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$B=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2,$$

进一步有

$$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)\beta^T=2A$$
$$A^4=8A$$

代入原方程化简，得

$$16Ax=8Ax+16x+\gamma$$

即 $$8\left(A-2E\right)x=\gamma$$

令 $x=\left(x_1,x_2,x_3,\right)^T$ ，代入上式，得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1+\dfrac{1}{2}x_2-2x_3=1 \end{cases}$$

其对应的齐次方程组的通解为

$$\xi=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}，（k\text{ 为任意常数}）$$

非齐次方程组的一个特解为

$$\eta^*=\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)^T$$

于是所求方程的通解为 $x=\xi+\eta^*$,即

$$x=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}，（k\text{ 为任意常数}）$$

**十三、**已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 $a,b$ 的值.

【详解】 方法一：

因为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 线性无关，$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且秩为 2，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 为它的一个极大线性无关组.

由于向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 具有相同的秩，故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关，

从而行列式

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0,$$

由此解得 $a=3b$,

又 $\beta_3$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，从而可由 $\alpha_1$， $\alpha_2$ 线性表示，

于是$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta_3$线性相关，

因此有

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得$2b-10=0$，

于是$a=15, b=5.$

方法二：

因$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解，对增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & \vdots & 3b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \dfrac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\dfrac{2b-1}{6} \end{bmatrix}$$

由非齐次线性方程有解的条件知

$$\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0,$$

解得 $b=5$

又因为$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关，$\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，而题设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$同秩，

从而有

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

由此解得 $a=15.$