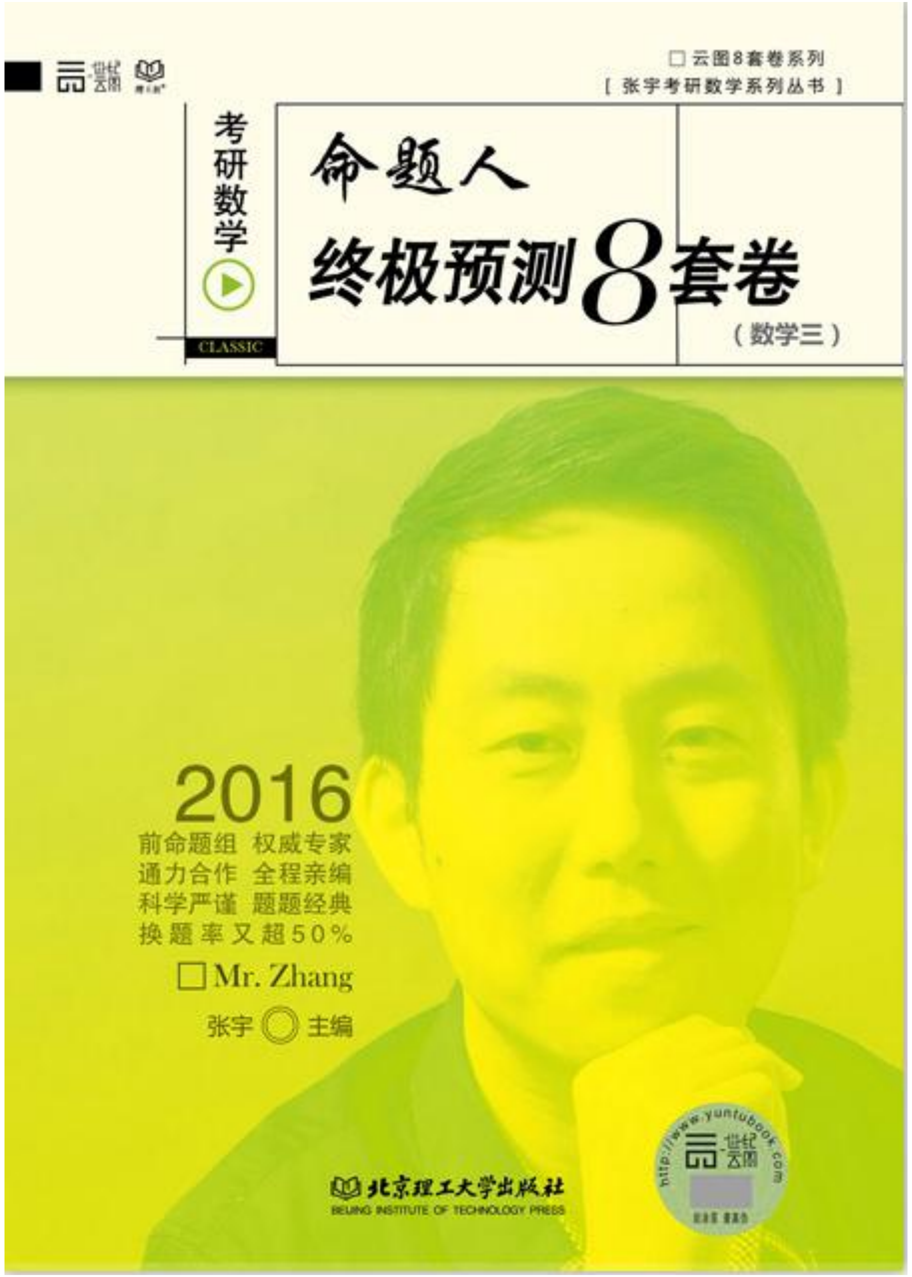
云图8套卷系列
[张宇考研数学系列丛书]
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学三）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
http://www.yuntubook.com

注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点__________
______考场____号
归属区县__________
(领准考证的区县)

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(八)

(科目代码:303)

考试时间: 上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题卡指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题卡指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题卡和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题: 1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,又设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+f^n(x)}\mathrm{d}x$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ( )

(A) 发散.　(B) 条件收敛.
(C) 绝对收敛.　(D) 敛散性与具体的 $f(x)$ 有关.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充要条件是 ( )

(A) $f(a)=0, f'(a)=0$.　(B) $f(a)=0, f'(a)\neq 0$.
(C) $f(a)\neq 0, f'(a)=0$.　(D) $f(a)\neq 0, f'(a)\neq 0$.

(3) 考虑一元函数 $f(x)$ 的下列 4 条性质:
①$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;
②$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积;
③$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导;
④$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数.
以 $P\Rightarrow Q$ 表示由性质 P 可推出性质 Q,则有 ( )

(A)①⇒②⇒③.　(B)③⇒①⇒④.
(C)①⇒②⇒④.　(D)④⇒③⇒①.

(4) 设在 $x>0$ 处 $f(x)$ 连续且严格单调增,并设 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $x>0$ 时 ( )

(A) 没有驻点.
(B) 有唯一驻点且为极大值点.
(C) 有唯一驻点且为极小值点.
(D) 有唯一驻点但不是极值点.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,且

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix},$$

则 ( )

(A) $a=-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　(B) $a=2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.
(C) $a=-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.　(D) $a=2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.

(6) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵，$AB = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{bmatrix}$，则 B 相似于 ( )

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(7) 已知随机变量 X 与 Y 都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，如果 $P\{\max\{X,Y\} > \mu\} = a(0 < a < 1)$，则 $P\{\min\{X,Y\} \leqslant \mu\} =$ ( )

(A) $\frac{a}{2}$.　(B) $1-\frac{a}{2}$.　(C) a.　(D) $1-a$.

(8) 设随机变量 X_1、X_2、X_3 相互独立，且 X_1、X_2 均服从 $N(0,1)$，$P\{X_3 = -1\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$，则 $Y = X_1 + X_2X_3$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 为 ( )

(A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.　(B) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$.　(C) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$.　(D) $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 直角坐标中的累次积分 $I = \int_0^{\frac{8a}{5}} dx \int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$ 化为极坐标先 r 后 θ 次序的累次积分 $I =$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 连续且 $f(x) \neq 0$，又设 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^x f(x-t)dt + \int_0^1 f^2(t)dt$，则 $f(x) =$ ________.

(11) 设常数 $a > 0$，双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 围成的平面区域记为 D，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma =$ ________.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x} - \frac{2}{x}\right] =$ ________.

(13) 设 A、B、C 均是 3 阶矩阵，满足 $AB = B^2 - BC$，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $A^5 =$ ________.

(14) 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$，$Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，且 X 与 Y 的相关系数为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $P\{X = Y\} =$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设三角形三边的长分别为 a，b，c，此三角形的面积设为 S. 求此三角形内的点到三边距离乘积的最大值，并求出这三个相应的距离.

(16)（本题满分 10 分）

设 $z = f(u)$ 存在二阶连续导数，并设复合函数 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 在 $x > 0$ 处满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

求 $f'(u)$ 及 $f(u)$ 的一般表达式.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(17)（本题满分 10 分）

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$.

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导且满足 $f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x}f(x)dx$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

(19)（本题满分 10 分）

设 $f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}$，$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1\}$. 求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

(20)（本题满分 11 分）

已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 2×4 矩阵，其中

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-3,1,0)^T$；

$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,3,0,2)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,-1,a)^T$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解，求参数 a 的值及公共解.

(21)(本题满分 11 分)

设线性齐次方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有通解$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}_1=k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,其中$k$是任意常数,$\boldsymbol{A}$是二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的对应矩阵,且$r(\boldsymbol{A})=1$.

(Ⅰ)问$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$是否是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解向量,说明理由;

(Ⅱ)求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$.

(22)(本题满分 11 分)

设X和Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求$Z=Y-X$的概率密度;

(Ⅱ)求数学期望$E(X+Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设袋中有编号为$1\sim N$的N张卡片,其中N未知.现从中有放回地任取n张,所得号码为$x_1,x_2,\cdots,x_n$.

(Ⅰ)求N的矩估计量$\hat{N}_1$,并计算概率$P\{\hat{N}_1=1\}$;

(Ⅱ)求N的最大似然估计量$\hat{N}_2$,并求$\hat{N}_2$的分布律.