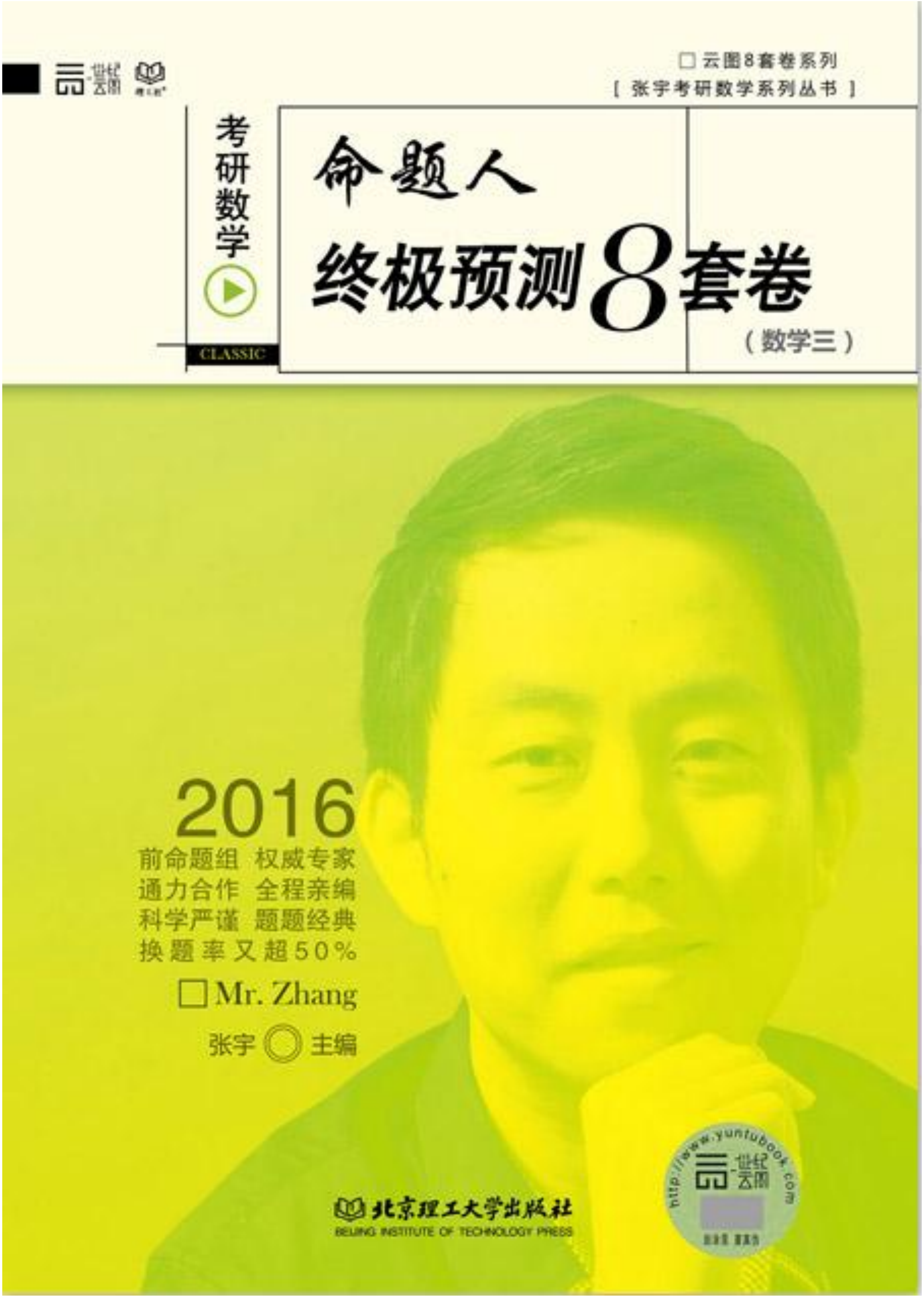

云图8套卷系列
【张宇考研数学系列丛书】
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学三）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
http://www.yuntubook.com

(23)【解】（Ⅰ）似然函数为：$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}=\exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\theta\right\},x_i>\theta,i=1,2,\cdots,n.$

显然 $L(\theta)$ 是 θ 的单调增函数，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_1=X_{\min}$.

又 $X_{\min}$ 的密度函数为 $g(x)=n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)},x>\theta$，故

$$E(\hat{\theta}_1)=\int_{\theta}^{+\infty}xn\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}(t+\theta)n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}+\theta.$$

$$E(\hat{\theta}_1^2)=\int_{\theta}^{+\infty}x^2n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}(t^2+2\theta t+\theta^2)n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}\theta+\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta}_1)=\frac{2}{n^2}+\frac{2\theta}{n}+\theta^2-\left(\frac{1}{n}+\theta\right)^2=\frac{1}{n^2}.$$

（Ⅱ）由于 $EX=\int_{\theta}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+1$，令 $\theta+1=\overline{X}$，

所以 θ 的矩估计量为：$$\hat{\theta}_2=\overline{X}-1.$$

又 $$E(X^2)=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta^2+2\theta+2,DX=1,$$

故 $$E(\hat{\theta}_2)=\theta,D(\hat{\theta}_2)=D(\overline{X}-1)=\frac{1}{n}.$$

【注】　利用平移方法可以快速得到 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的期望与方差.

考研数学命题人终极预测卷(八)

一、选择题

(1)【答案】　(B)

【分析】　由于 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 且 $f(x)$ 连续，有

$$a_n=\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+f^n(x)}\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{1+f^{n+1}(x)}\mathrm{d}x=a_{n+1},$$

且 $$\frac{1}{n}\leqslant a_n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{n},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，并且由莱布尼茨定理知，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

(2)【答案】　(B)

【分析】　若 $f(a)\neq 0$，则存在 $x=a$ 的某邻域 U，在该邻域内 $f(x)$ 与 $f(a)$ 同号，于是推知，若 $f(a)>0$，则 $|f(x)|=f(x)$（当 $x\in U$）；若 $f(a)<0$，则 $|f(x)|=-f(x)$. 总之，若 $f(a)\neq 0$，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处总可导. 若 $f(a)=0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}.$$

从而知

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^{\pm}}\pm\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=\pm|f'(a)|,$$

其中 $x\to a^+$ 时，取"+"，$x\to a^-$ 时，取"−"，所以当 $f(a)=0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $|f'(a)|=0$，即 $f'(a)=0$.

所以当且仅当 $f(a)=0,f'(a)\neq 0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导，故应选(B).

(3)【答案】　(B)

【分析】　因可导必连续，连续函数必存在原函数，故(B)正确.

(A)不正确. 虽然由①(连续)可推出②(可积)，但由②(可积)推不出③(可导). 例如 $f(x)=|x|$

在$[-1,1]$上可积：$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x=1$. 但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(C) 不正确. 由 ②(可积) 推不出 ④(存在原函数)，例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

在$[-1,1]$上可积，则

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}1\mathrm{d}x=-1+1=0,$$

但 $f(x)$ 在$[-1,1]$上不存在原函数. 因为如果存在原函数 $F(x)$，那么只能是 $F(x)=|x|+C$ 的形式，而此函数在点 $x=0$ 处不可导，在区间$[-1,1]$上它没有做原函数的"资格".

(D) 不正确. 因为由 ④(存在原函数) 推不出 ①(函数连续). 例如：

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它存在原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

但 $f(x)$ 并不连续. 即存在原函数的函数 $f(x)$ 可以不连续.

(4)【答案】 (A)

【分析】 $F(x)=\int_{0}^{x}(2t-x)f(t)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t-x\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,

$$F'(x)=2xf(x)-xf(x)-\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=xf(x)-\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=xf(x)-xf(\xi)=x[f(x)-f(\xi)],0<\xi<x.$$

由于 $f(x)$ 严格单调增加，可知 $f(x)>f(\xi)$，所以 $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $x>0$ 时无驻点，故应选(A).

(5)【答案】 (D)

【分析】 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$. 又 $r(\boldsymbol{A})>0$，且

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & a+1 & 0\\ 0 & 0 & (a+1)(a-2)\end{bmatrix},$$

所以当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1$，$r(\boldsymbol{A})=1$ 或 $r(\boldsymbol{A})=2$. 故选项(A)、(C) 不成立.

当 $a=2$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$，必有 $r(\boldsymbol{A})=1$. 选项(D) 成立，选项(B) 不成立. 故应选(D).

(6)【答案】 (B)

【分析】 由题设条件知矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换得到的. 具体的是，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行乘 -1，第 2 行乘 2 后再将第 2、3 行互换得 $\boldsymbol{AB}$，即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{A},$$

两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{ABA}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}$，即有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

(7)【答案】 (C)

【分析】 法一 $P\{\max\{X,Y\}>\mu\}=P\{\{X>\mu\}\cup\{Y>\mu\}\}$

$$\begin{aligned}&=P\{X>\mu\}+P\{Y>\mu\}-P\{X>\mu,Y>\mu\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant\mu\},\end{aligned}$$

选择(C).

法二

$$\begin{aligned}P\{\max\{X,Y\}>\mu\}&=1-P\{\max\{X,Y\}\leqslant\mu\}\\&=1-P\{X\leqslant\mu,Y\leqslant\mu\}\overset{\text{记}}{=}1-P(AB),\end{aligned}$$

其中 $A=\{X\leqslant\mu\}$，$B=\{Y\leqslant\mu\}$. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，

所以 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}P\{\min\{X,Y\}\leqslant\mu\}&=1-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}=1-P\{X>\mu,Y>\mu\}\\&=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A\cup B})=P(A\cup B)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)=1-P(AB)=\alpha,\end{aligned}$$

选择(C).

(8)【答案】 (B)

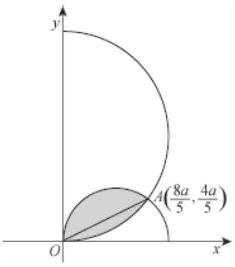
【分析】 因为 X_1,X_2 均服从 $N(0,1)$，且相互独立，则 X_1-X_2，X_1+X_2 均服从 $N(0,2)$，故

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{X_3=-1\}P\{X_1+X_2X_3\leqslant y\mid X_3=-1\}+P\{X_3=1\}P\{X_1+X_2X_3\leqslant y\mid X_3=1\}\\&=P\{X_3=-1\}P\{X_1-X_2\leqslant y\}+P\{X_3=1\}P\{X_1+X_2\leqslant y\}\\&=\frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{y}{\sqrt{2}}\right\}+\frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{y}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=\left[\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

二、填空题

(9)【答案】 $\int_0^{\arctan\frac{1}{2}}d\theta\int_0^{4a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$



【分析】 按题目上、下限，积分区域 D 如图阴影所示，对 y 的上限方程为 $y=\sqrt{2ax-x^2}$，化为极坐标为

$$r=2a\cos\theta.$$

对 y 的下限方程为 $y=2a-\sqrt{4a^2-x^2}$，化为极坐标为

$$r=4a\sin\theta.$$

OA 的倾角记为 θ_0，$\tan\theta_0=\dfrac{1}{2}$. 于是，由极坐标，直线段 OA 将 D 分成两块，在极坐标系中，积分如答案所示.

(10)【答案】 $\dfrac{2e^x}{e^2-1}$

【分析】 $f(x)=\int_0^x f(x-t)dt+\int_0^1 f^2(t)dt$

$$=-\int_x^0 f(u)du+\int_0^1 f^2(t)dt=\int_0^x f(u)du+\int_0^1 f^2(t)dt.$$

令 $\int_0^1 f^2(t)dt=a$，于是

$$f(x)=\int_0^x f(u)du+a,\ f'(x)=f(x),\ f(0)=a,$$

解得 $f(x)=ce^x$. 由 $f(0)=a$，得 $f(x)=ae^x$，代入 $\int_0^1 f^2(t)dt=a$ 中，得

$$a=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=a^2\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}(\mathrm{e}^2-1).$$

解得 $a=0$（舍去），$a=\frac{2}{\mathrm{e}^2-1}$，所以 $f(x)=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2-1}$.

（11）**【答案】** $\frac{\pi}{8}a^4$

【分析】 由于被积函数及积分区域 D 关于两坐标轴都对称，所以

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\mathrm{d}r=a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}a^4.$$

（12）**【答案】** -1

【分析】

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}-\frac{2}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)-2(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)-2(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-2\sin x}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-2\cos x}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+2\sin x\right]=-1.$$

（13）**【答案】** $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

【分析】 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}^{-1},$$

于是 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}^{-1}\cdots\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})^5\boldsymbol{B}^{-1}$,

又易知 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$.

故 $$\boldsymbol{A}^5=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

（14）**【答案】** $\frac{3}{4}$

【分析】 易知 $EX=\frac{3}{4}$，$DX=\frac{3}{16}$，$EY=\frac{1}{2}$，$DY=\frac{1}{4}$，又 $\rho_{XY}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{3}{16}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{8},$$
$$E(XY)=EXEY+\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

则 (X,Y) 的联合概率分布为：

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

所以 $P\{X=Y\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)**【解】** 设 P 为三角形内的任意一点，该点到长分别为 a,b,c 的边的距离分别为 x,y,z. 由三角形的面积公式有
$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz=S.$$
求 $f=xyz$ 在约束条件 $ax+by+cz-2S=0$ 下的最大值. 令
$$W=xyz+\lambda(ax+by+cz-2S).$$
由拉格朗日乘数法，
$$\frac{\partial W}{\partial x}=yz+a\lambda=0,\ \frac{\partial W}{\partial y}=xz+b\lambda=0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial z}=xy+c\lambda=0,\ \frac{\partial W}{\partial \lambda}=ax+by+cz-2S=0,$$
解得 $x=\frac{2S}{3a},y=\frac{2S}{3b},z=\frac{2S}{3c}$. 显然当 P 位于三角形边界上时，$f=0$ 为最小值；当 P 位于三角形内部时，f 存在最大值. 由于驻点唯一，故当 $x=\frac{2S}{3a},y=\frac{2S}{3b},z=\frac{2S}{3c}$ 时，f 最大，
$$f_{\max}=\frac{8S^3}{27abc}.$$

(16)**【解】** $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$，有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f',\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^4}f''+\frac{2y}{x^3}f',\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f',\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''.$$
所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^4}f''+\frac{2xy}{x^4}f'=0,x>0.$$
令 $u=\frac{y}{x}$，原方程化为
$$(1+u^2)f''+2uf'=0.$$
这是关于 f' 的一阶线性方程(或变量分离方程)，即
$$(1+u^2)(f')'+2u(f')=0.$$
解得
$$f'(u)=\frac{C_1}{1+u^2},$$
再积分，得
$$f(u)=C_1\arctan u+C_2，其中 C_1、C_2 为任意常数．$$

(17)**【解】** 先看
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2+\cos x}=0,\qquad(*)$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

因此原式为“$\frac{0}{0}$”型. 再由（*）式,用等价无穷小替换,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x-1}{3}\right)=-\frac{1}{6}.$$

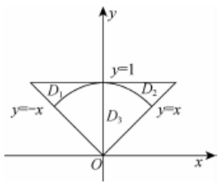
(18)【证】 有两种证明方法.

法一 从结论推上去,要证明存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得
$$f'(\xi)+f(\xi)=0,$$
即 $e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f(\xi)=0$,即证明存在 $\xi\in(0,1)$,使得
$$[e^{\xi}f(\xi)]'=0.$$
令 $F(x)=e^{x}f(x)$,要证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$. 为此,只要验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理即可. 由于
$$f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x}f(x)dx\xlongequal{\text{积分中值定理}}e^{\eta}f(\eta),\frac{1}{2}<\eta<1,$$
即 $$F(0)=F(\eta),0<\eta<1.$$
所以存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即
$$e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f(\xi)=0.$$
因 $e^{\xi}\neq 0$,上式等价于 $f'(\xi)+f(\xi)=0$. 证毕.

法二 从条件往下推. 由 $f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x}f(x)dx$ 及积分中值定理知,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $f(0)=e^{\eta}f(\eta)$,即 $e^{0}f(0)=e^{\eta}f(\eta)$.

令 $F(x)=e^{x}f(x)$,有 $F(0)=F(\eta)$. 由罗尔中值定理,存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$,使得
$$F'(\xi)=[e^{x}f(x)]'\Big|_{x=\xi}=e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f(\xi)=e^{\xi}[f'(\xi)+f(\xi)]=0,$$
即 $f'(\xi)+f(\xi)=0$. 证毕.

(19)【解】 如图所示,将 D 分成三块,中间一块记为 D_3,左、右两块分别记为 D_1 与 D_2.



$$f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in D_1\cup D_2,\\ 1, & (x,y)\in D_3.\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1\cup D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint_{D_3}1d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{1}^{\frac{1}{\sin\theta}}r^2dr+\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^3\theta-1)d\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta d\theta+\frac{\pi}{12}.$$

而 $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\csc^2\theta d\theta$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta d\cot\theta=-\left(\csc\theta\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cot^2\theta\csc\theta d\theta\right)$$
$$=-\left[-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-1)\csc\theta d\theta\right].$$

所以 $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta d\theta=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta d\theta=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln|\csc\theta-\cot\theta|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1).$$

故 $$\text{原式}=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{12}.$$

(20)【解】（Ⅰ）记 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，则有 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{O}$，得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量(即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量)是 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-3&1&0\end{bmatrix},$$

解得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-7,1,3,0)^{\mathrm{T}}$.

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\-7&1&3&0\end{bmatrix}.$$

【注】 $\boldsymbol{A}$ 的表达式不唯一.

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解，则非零公共解既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出，设公共解为

$$\boldsymbol{\eta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_3\boldsymbol{\beta}_1+x_4\boldsymbol{\beta}_2.$$

于是
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-x_3\boldsymbol{\beta}_1-x_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}.\qquad(*)$$

对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2)$ 作初等行变换，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\1&-3&-3&-2\\2&1&0&1\\1&0&-2&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&-3&-2&-1\\0&1&2&3\\0&0&-1&-a+1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\\0&0&4&8\\0&0&-1&-a+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&-a+3\end{bmatrix}.$$

当 $a=3$ 时，方程组(*)有非零解，$k(-1,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$. 此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的非零公共解，为

$$\boldsymbol{\eta}=L_1(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=L_1(-1,-4,-1,-1)^T=L_1(1,4,1,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 L_1 是任意常数，

或

$$\boldsymbol{\eta}=L_2(-2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=L_2(1,4,1,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 L_2 是任意常数.

(21)【解】（Ⅰ）$\boldsymbol{A}$ 是二次型的对应矩阵，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}_1=k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=2$，且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. $r(\boldsymbol{A})=1$，故知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解向量即是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量，其应与对应于 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交，

因 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=0$，故 $\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，即是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量.

又 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_2=(-1,1,1)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=-2\neq0$，故 $\boldsymbol{\eta}_2$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

（Ⅱ）求二次型即求其对应矩阵.

法一　求对应 $\lambda=0$ 的线性无关特征向量. 设为 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

由 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=-x_1+x_2+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关)，则得

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$，

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}.$$

故二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3$.

法二 求对应于 $\lambda=0$ 的正交的特征向量，设为 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=-x_1+x_2+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化后合并成正交矩阵有

$$Q=(\boldsymbol{\xi}_1^0,\boldsymbol{\xi}_2^0,\boldsymbol{\xi}_3^0)=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

则有 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$.

$$A=Q\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}.$$

即 $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3$.

法三 直接由题设条件求 A.

由 $r(A)=1$，可设 $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\ka&kb&kc\\la&lb&lc\end{bmatrix}$，$a,b,c$ 不全为零.

因 $(2E-A)\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，$A\boldsymbol{\xi}_1=2\boldsymbol{\xi}_1$，即 $\begin{bmatrix}a&b&c\\ka&kb&kc\\la&lb&lc\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，

得
$$\begin{cases}-a+b+c=-2,\\k(-a+b+c)=2,\text{得 }k=l=-1,\\l(-a+b+c)=2,\end{cases}$$

又 $A^{\mathrm{T}}=A$，得 $b=-a=c$，故

$$A=\begin{bmatrix}a&-a&-a\\-a&a&a\\-a&a&a\end{bmatrix}.$$

由 $-a+b+c=-3a=-2$，得 $a=\frac{2}{3}$，故 $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}$.

对应的二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3.$$

(22)【解】（Ⅰ）**法一** 分布函数法.

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{Y-X\leqslant z\}=\iint\limits_{y-x\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

当 $z<0$ 时，$f(x,y)$ 的非零区域与 $\{(x,y)\mid y-x\leqslant z\}$ 的交集为图(a) 中的阴影部分，

$$F_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{z+x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z};$$

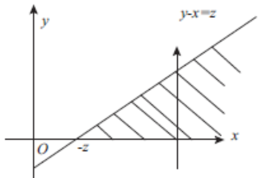


图 (a)

当 $z\geqslant 0$ 时，$f(x,y)$ 的非零区域与 $\{(x,y)\mid y-x\leqslant z\}$ 的交集为图(b) 中的阴影部分，

$$F_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{z+x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z},$$

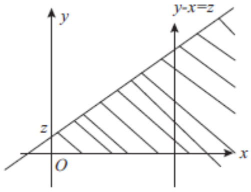


图 (b)

故
$$F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0\end{cases}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|}.$$

法二　密度函数法.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z+x)\mathrm{d}x,$$

$$f(x,z+x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(z+2x)}, & x>0,z+x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

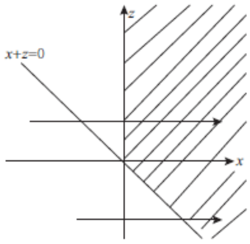


图 (c)

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z+2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z+2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$，

故
$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0\end{cases}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|}.$$

（Ⅱ）
$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}(x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}+y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=2.$$

(23)【解】 X 与 X_i 同分布，此题已知样本分布，即可得到总体 X 分布为

X	1	2	…	N
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	…	$\frac{1}{N}$

（Ⅰ）$\overline{X}=EX=1\cdot\frac{1}{N}+2\cdot\frac{1}{N}+\cdots+N\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}(1+2+\cdots+N)=\frac{1}{N}\cdot\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N+1}{2}$,

故 N 的矩估计量为 $\hat{N}_1=2\overline{X}-1$.

又 $\hat{N}_1=1$，则 $\bar{x}=1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，因此有 $\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\\ x_i\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x_i=1\quad(i=1,\cdots,n)$，

故
$$\begin{aligned}P\{\hat{N}_1=1\}&=P\{X_1=1,X_2=1,\cdots,X_n=1\}\\&=P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=1\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n=1\}\\&=\frac{1}{N^n}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;N)=P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdot\cdots\cdot P\{X=x_n\}=\dfrac{1}{N^n}\quad(1\leqslant x_i\leqslant N)$,

$$N\geqslant\max\{x_i\}\quad(i=1,\cdots,n).$$

故 N 的最大似然估计量为 $\hat{N}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，$\hat{N}_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布律为

$$\begin{aligned}P\{\hat{N}_2=k\}&=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}=k\}\\&=P\{\hat{N}_2\leqslant k\}-P\{\hat{N}_2\leqslant k-1\}\\&=P\{X_1\leqslant k\}\cdot P\{X_2\leqslant k\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\leqslant k\}-\\&\quad P\{X_1\leqslant k-1\}\cdot P\{X_2\leqslant k-1\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\leqslant k-1\}\\&=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n.\end{aligned}$$