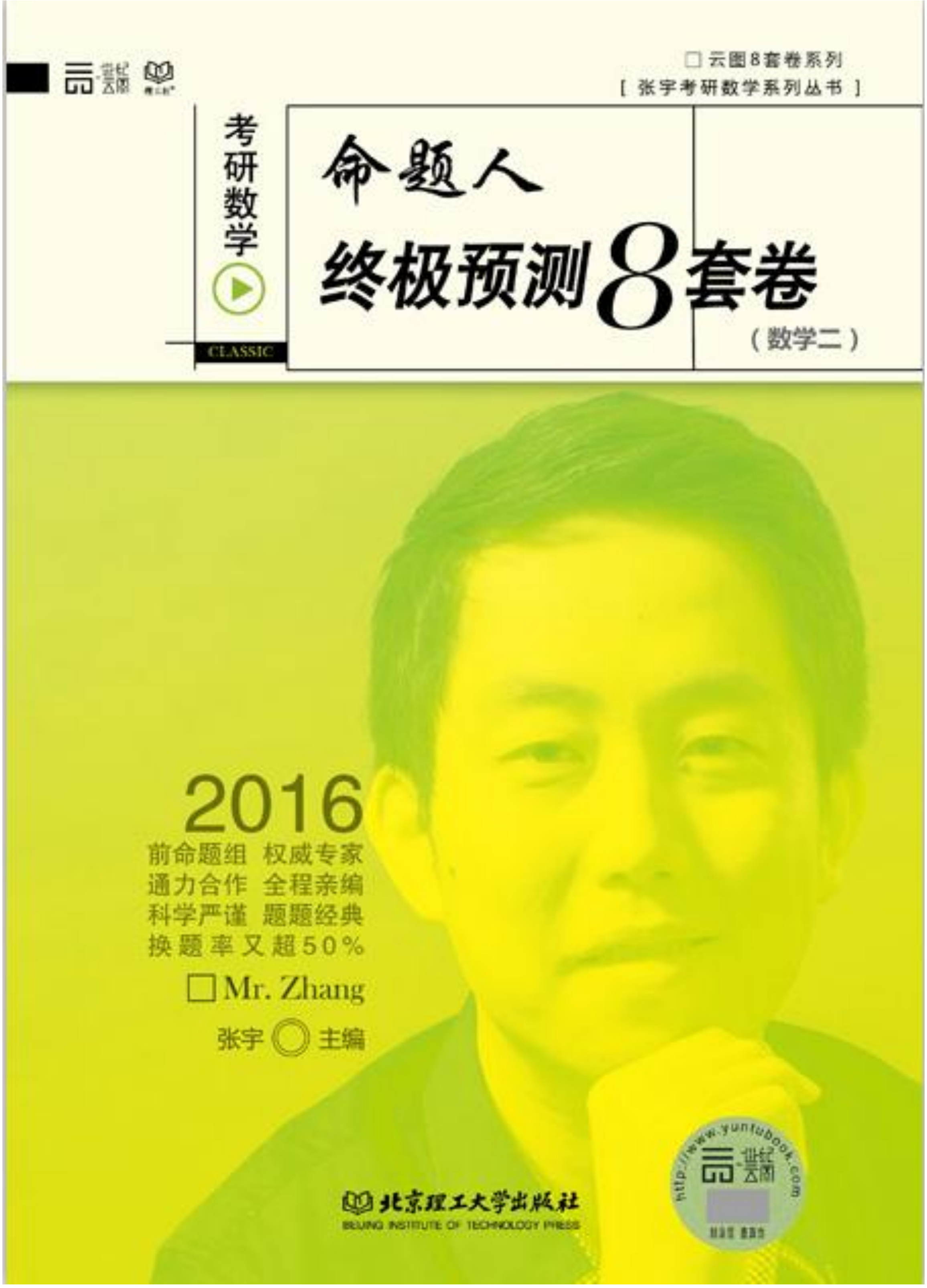

云图8套卷系列
【张宇考研数学系列丛书】
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学二）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
http://www.yuntubook.com

当 $\lambda\neq 2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}&=k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}+(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\\&=(-2k-1,k,-k,2k+1)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中 k 是任意常数.

当 $\lambda=2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=2$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-4,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\begin{aligned}k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}&=k_1(-4,1,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,0,1,0)+(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}\\&=(-4k_1-2k_2-1,k_1,k_2,2k_1+1)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中 k_1,k_2 是任意常数.

（Ⅱ）当 $\lambda\neq 2$ 时，由 $x_2=x_3$，有 $k=-k$，得 $k=0$. 故满足 $x_2=x_3$ 的全部解为 $(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=2$ 时，由 $x_2=x_3$，有 $k_1=k_2$.

故满足 $x_2=x_3$ 的全部解为 $(-6k_1-1,k_1,k_1,2k_1+1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 是任意常数.

(23)**【解】** **法一** （Ⅰ）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}(3,-2,-1,1)=\begin{bmatrix}3&-2&-1&1\\6&-4&-2&2\\9&-6&-3&3\\12&-8&-4&4\end{bmatrix}$，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&1&-1\\-6&\lambda+4&2&-2\\-9&6&\lambda+3&-3\\-12&8&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&1&-1\\-2\lambda&\lambda&0&0\\-3\lambda&0&\lambda&0\\-4\lambda&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&1&-1\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0$（四重根）.

当 $\lambda=0$ 时，有 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的同解方程为

$$3x_1-2x_2-x_3+x_4=0.$$

解得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2,3,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,0,-3)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为不同时为零的任意常数.

（Ⅱ）因 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})=1\,(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

因此 $\lambda=0$ 为四重根时，线性无关的特征向量只有三个，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

法二 （Ⅰ）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})=1$. 又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$，$|\boldsymbol{A}|=0$.

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0$. 对应的特征向量满足 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其同解方程组为

$$3x_1-2x_2-x_3+x_4=0.$$

故知 $\lambda=0$ 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值，设第 4 个特征值为 λ_4.

由 $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{4}a_{ii}=3-4-3+4=0$，得 $\lambda_4=0$，故 $\lambda=0$ 是四重特征值. 对应特征向量求法同法一.

（Ⅱ）由于 $\lambda=0$ 是四重特征值，但对应的线性无关特征向量只有 3 个，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

考研数学命题人终极预测卷（八）

一、选择题

(1)**【答案】** (A)

【分析】 当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 与 x^m 为同阶无穷小，从而知存在常数 $A\neq0$，当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim Ax^m$，从而，$f(x^n)\sim Ax^{mn}$. 于是

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^k}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)\cdot nx^{n-1}}{kx^{k-1}}=\frac{An}{k}\lim_{x\to0}\frac{x^{mn}x^n}{x^k}.$$

由题意可知，上式为不等于零的常数，故 $k=nm+n$.

(2)【答案】 (B)

【分析】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$. 由于当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}e^{nx}=0$，$f(x)=x$；当 $x=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$；当 $x>0$ 时，

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{xe^{-nx}+1}{e^{-nx}+1}=1.$$

所以 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{1}dx=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. 故应选(B).

(3)【答案】 (B)

【分析】 由条件知 $f(x)=(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$，$f'(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned}(\text{Ⅰ})&=\int_0^{+\infty}x^4f'(x)dx=\int_0^{+\infty}x^4df(x)=x^4f(x)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}4x^3f(x)dx\\&=\lim_{x\to+\infty}x^4\left(-2xe^{-x^2}\right)+8\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^2}dx\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{e^{x^2}}-4\int_0^{+\infty}x^3de^{-x^2}\\&=0-4\left(x^3e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}3x^2e^{-x^2}dx\right)\\&=-4\left(0+\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}xde^{-x^2}\right)=-6\left(xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\\&=6\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=3\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{Ⅱ})&=\int_0^{+\infty}x^3f''(x)dx=\int_0^{+\infty}x^3df'(x)\\&=x^3f'(x)\Big|_0^{+\infty}-3\int_0^{+\infty}x^2f'(x)dx=0-3\int_0^{+\infty}x^2df(x)\\&=-3x^2f(x)\Big|_0^{+\infty}+6\int_0^{+\infty}xf(x)dx=0-12\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx\\&=6\int_0^{+\infty}xde^{-x^2}=6\left(xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\\&=-6\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=-3\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

故选(B).

(4)【答案】 (C)

【分析】 先作积分变量代换，令 $x-t=u$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{\int_x^0(x-u)f(u)(-du)}{x\int_x^0 f(u)(-du)}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du}{x\int_0^x f(u)du}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{f'(x)}{x}}.$$

由二阶导数定义，

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{2}f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{4}.$$

(5)**【答案】** (C)

【分析】 $g(x)$在$[-1,1]$上连续，故存在原函数.

(A)不正确. $f(x)$在点$x=0$处具有跳跃间断点. 函数在某点具有跳跃间断点，那么在包含此点的区间上，该函数必不存在原函数.

(B)不正确. 按定义容易知道$g'(0)$不存在.

(D)不正确. 可以具体计算出$F(x)$，容易看出$F'_-(0)=0$，$F'_+(0)=1$，故$F'(0)$不存在.

(6)**【答案】** (B)

【分析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F_2'\cdot y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_2'\cdot z}{F_1'\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F_2'\cdot y},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

(7)**【答案】** (D)

【分析】 $\boldsymbol{A}$是3阶非零矩阵，则$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})\geqslant1$.

$$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O},r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant1,$$

因$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，得$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant3$，且

$$1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant2,1\leqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant2.$$

故矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的秩$r(\boldsymbol{A})$和$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$或者都是1，或者一个是1，另一个是2(不会是3，也不会是0，也不可能两个都是2. 故两个中至少有一个的秩为1).

故(A)、(B)、(C)均是错误的，应选(D).

(8)**【答案】** (D)

【分析】 由$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ，且存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}, \tag{$*$}$$

($*$)式两边求逆得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}, \tag{$**$}$$

从而$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$(①成立).

($*$)式两边转置，得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，记$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，即$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

从而$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$(②成立).

($**$)式两边乘 $\boldsymbol{A}$ ，$\boldsymbol{P}^{-1}$ $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$ $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*$，从而$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$(③成立).

因$\boldsymbol{A}$可逆，故$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{EBA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$(④成立).

故应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** e^{-2}

【分析】 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)\right\},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(1+\frac{1-\cos x-\sin x-x}{1+x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\left(\frac{1-\cos x-\sin x-x}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\sin x-x}{x+x^2}$$
$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x-1}{1+2x}=-2,$$
所以原极限 $=e^{-2}$.

(10)**【答案】** $\frac{1}{2};\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

【分析】 作积分变量代换，令 $t\sqrt{\ln\frac{1}{a}}=u$，从而
$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{a}}dt=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{a}}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{a}}},\quad 0<a<1.$$
$$\lim_{a\to 1^-}(1-a)^p\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{a}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{a\to 1^-}\frac{(1-a)^p}{\sqrt{\ln\frac{1}{a}}}$$
$$\xlongequal{1-a=t}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^p}{\sqrt{-\ln(1-t)}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{t^p}{t^{\frac{1}{2}}}.$$
上述极限存在且不为零的充要条件是 $p=\frac{1}{2}$. 此时，该极限值等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(11)**【答案】** e^{-2}

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}}$，
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$$
$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x}{1+2x}}{2x}=-2.$$
所以原式 $=e^{-2}$.

(12)**【答案】** $y=\ln\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)\right]$，其中 C 为任意常数

【分析】 将 $y'+\frac{1}{x}=xe^{-y}$，化为 $e^y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}e^y=x$，即 $\frac{de^y}{dx}+\frac{1}{x}e^y=x$，
$$e^y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{|x|}\left(\int x|x|dx+C\right).$$
当 $x>0$ 时，$e^y=\frac{1}{x}\left(\int x^2dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$；

当 $x<0$ 时，$e^y=-\frac{1}{x}\left(-\int x^2dx+C\right)=-\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^3+C\right)$.

合并可写成 $e^y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$，即 $y=\ln\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)\right]$.

(13)**【答案】** $\pi-2$

【分析】 用万能代换，令 $\tan\frac{x}{2}=t$，有 $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，
$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2}dt$$
$$=2\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right]dt=2\left(\arctan t+\frac{1}{1+t}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2.$$

【注】 万能代换是计算三角有理函数积分的一个重要方法，较繁琐，不常考，但应引起考生注意.本题如果按下述方法去做是错误的：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cdot(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx.$$

而 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{-1}{\cos^2 x}d\cos x=\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\pi}=-1-1=-2$，显然是错的，因为在$[0,\pi]$上$\frac{\sin x}{\cos^2 x}\geqslant 0$，结果却为负.读者想一想，为什么这种做法是错的？

(14)**【答案】** $\frac{935}{6}$

【分析】 由于 $A\sim B$，则 A,B 有相同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

$$|A^*B-A^{-1}|=||A|A^{-1}B-A^{-1}|=|A^{-1}(|A|B-E)|$$
$$=||A|B-E||A^{-1}|,$$

其中 $$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=6,\ |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{6}.$$

$6B$ 有特征值 6，12，18，则 $6B-E$ 有特征值 5，11，17.

故 $$|A^*B-A^{-1}|=5\times11\times17\times\frac{1}{6}=\frac{935}{6}.$$

三、解答题

(15)**【解】** 先对 y 后对 x 积分，摆线纵坐标记为 $y(x)$，于是

$$\iint_D y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)dx,$$

上式中的 $y=y(x)$ 通过参数式联系着.对上式作积分变量代换 $x=a(t-\sin t)$，从而 $y(x)$ 成为 t 的函数 $y(x)=a(1-\cos t)$，于是

$$\iint_D y^2dxdy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^4(1-\cos t)^3d(t-\sin t)$$
$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$$
$$=\frac{16}{3}a^4\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}dt=\frac{32}{3}a^4\int_0^{\pi}\sin^8 udu$$
$$=\frac{64}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 udu=\frac{64}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}a^4$$
$$=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

(16)**【解】** （Ⅰ）因为二次式 $x^2\pm x+1$ 的判别式$(\pm1)^2-4=-3<0$，所以 $x^2\pm x+1>0$，$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

又 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$为奇函数.

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\frac{(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2+x+1}},$$

当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$.当 $x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)$的分子中两项记为 $a,b,a>0,b>0$，考虑

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=\left[(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\right]^2-\left[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\right]^2\\&=-6x<0,\end{aligned}$$

故 $0<a<b$. 所以当 $x>\frac{1}{2}$ 时，仍有 $f'(x)<0$，从而当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$. 又 $f(x)$ 为奇函数，故当 $-\infty<x<0$ 时，$f'(x)<0$. 所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，均有 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调减少，$f(x)$ 无极值.

（Ⅱ）$f''(x)=\dfrac{4(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{4(x^2-x+1)^{3/2}}-\dfrac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{4(x^2+x+1)^{3/2}}$

$$=\frac{3\left[(x^2+x+1)^{3/2}-(x^2-x+1)^{3/2}\right]}{4(x^2-x+1)^{3/2}(x^2+x+1)^{3/2}}\begin{cases}>0, & x>0,\\<0, & x<0,\end{cases}$$

$f''(0)=0$.

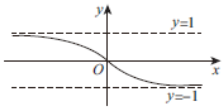
所以当 $-\infty<x<0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 是凸的，当 $0<x<+\infty$ 时，曲线是凹的. 点 $(0,f(0))$ 为拐点.

易知无铅直渐近线. 考虑水平渐近线：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=-1,\end{aligned}$$

所以沿 $x\to+\infty$ 方向有水平渐近线 $y=-1$. 由于 $f(x)$ 为奇函数，所以沿 $x\to-\infty$ 方向有一条水平渐近线 $y=1$.

画图如下：



(17)【证】 由积分中值定理，存在 $\eta\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$，使得 $4\int_0^{\frac{1}{4}}x^3f(x)\mathrm{d}x=\eta^3f(\eta)$.

令 $F(x)=x^3f(x)$，因为 $f(1)-4\int_0^{\frac{1}{4}}x^3f(x)\mathrm{d}x=0$，故有 $f(1)=\eta^3f(\eta)$，即 $F(1)=F(\eta)$.

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，由罗尔中值定理得，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)=-\dfrac{3f(\xi)}{\xi}$. 故命题得证.

(18)【解】 由 $y=\varphi(x)u$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)u+\varphi(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\varphi''(x)u+2\varphi'(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\varphi(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}.$$

代入原方程，得

$$\varphi(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\left[2\varphi'(x)+x\varphi(x)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\varphi''(x)+x\varphi'(x)+\frac{1}{4}x^2\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)\right]u=0.$$

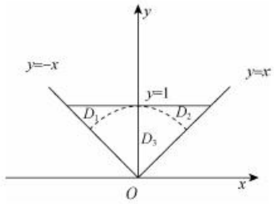
取 $\varphi(x)$ 使 $2\varphi'(x)+x\varphi(x)=0$. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi(x)}=-\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$，取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$. 经计算可知

$$\lambda=\varphi''(x)+x\varphi'(x)+\frac{1}{4}x^2\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)=0.$$

于是原方程经变换 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}u$ 之后，化为 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$.

解之得 $u=C_1+C_2x$，故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(19)【解】 如图所示，将 D 分成三块，中间一块记为 D_3，左、右两块分别记为 D_1 与 D_2，则



$$f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in D_1\cup D_2,\\ 1, & (x,y)\in D_3.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1\cup D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{1}{\sin\theta}}r^2\mathrm{d}r+\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^3\theta-1)\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\csc^2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\mathrm{d}\cot\theta=-\left(\csc\theta\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cot^2\theta\csc\theta\mathrm{d}\theta\right)\\ &=-\left[-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-1)\csc\theta\mathrm{d}\theta\right],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta &= \sqrt{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}+\frac{1}{2}(\ln|\csc\theta-\cot\theta|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\\ &=\sqrt{2}+\frac{1}{2}[\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)]=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

原式 $=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{12}$.

(20)【解】 令 $F(x,y)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8$，且令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0,$$

解得 $y=0,4x+8z=0$，再与 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 联立，解得两组解为

$$(x,y,z)_1=(-2,0,1);(x,y,z)_2=\left(\frac{16}{7},0,-\frac{8}{7}\right).$$

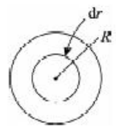
再求二阶偏导数并以两组解分别代入，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_1=\frac{4}{15},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_1=0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_1=\frac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_2=-\frac{4}{15},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_2=0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_2=-\frac{4}{15}.$$

所以在第一组点处，$B^2-AC<0,A=\frac{4}{15}>0$，故 $z=1$ 为极小值；在第二组点处，$B^2-AC<0$，$A=-\frac{4}{15}<0$，故 $z=-\frac{8}{7}$ 为极大值.

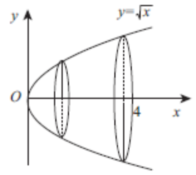
(21)【解】 (Ⅰ)以环细分圆盘，设环的宽度为 $\mathrm{d}r$，内半径为 r，在环上点密度视为不变，为 r^2，质量元素为 $\mathrm{d}m=r^2\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot h$. 于是该圆盘的质量为



$$m=2\pi h\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi hR^4.$$

(Ⅱ)该旋转体可看成由一个个薄片组成，由(Ⅰ)，每一薄片的质量

$$\mathrm{d}M=\frac{1}{2}\pi R^4\,\mathrm{d}x,$$



其中 R 为 x 处的旋转半径,即 y,于是质量元素为

$$\mathrm{d}M=\frac{1}{2}\pi y^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi x^2\,\mathrm{d}x.$$

所以物体的质量为

$$M=\frac{1}{2}\pi\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi(4^3-1)=\frac{63}{6}\pi=\frac{21}{2}\pi.$$

(22)**【证】** (Ⅰ)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_i)=\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$,$i=0,1,2,\cdots,n-r$(其中 $\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{0}$),

故$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_i$,$i=0,1,2,\cdots,n-r$ 均是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解向量.

设有数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}+k_1(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

(*)式左乘 $\boldsymbol{A}$,得 $k_0\boldsymbol{A\eta}+k_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0}$,

整理得 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

故 $$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0, \qquad (**)$$

代入(*)式,得 $$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应齐次方程组的基础解系,线性无关,得 $k_i=0$,$i=1,2,\cdots,n-r$. 代入(**)式,得 $k_0=0$. 从而有 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解向量.

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解,则

$$\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^*&=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\\&=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})+\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})\\&=(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}+\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta})+\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}),\end{aligned}$$

故任一个 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{\eta}^*$,均可由向量组 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出.

(23)**【解】** (Ⅰ)$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&0&0\end{bmatrix},\text{知 } r(\boldsymbol{B})=2.$$

显然,当 $t=0$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$,$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

(Ⅱ)$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&1\\0&\lambda-2&0\\1&-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-1]=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1),$$

则 $\boldsymbol{C}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&-1&\lambda-t\end{vmatrix}=(\lambda-t)[(\lambda-2)^2-1]\\&=(\lambda-t)(\lambda-3)(\lambda-1).\end{aligned}$$

当 $t=2$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有与 $\boldsymbol{C}$ 一样的三个不同的特征值. 故知,当 $t=2$ 时,有可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}.$$

从而有 $$(\boldsymbol{QP}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{QP}^{-1})=\boldsymbol{C},\text{即 }\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}.$$