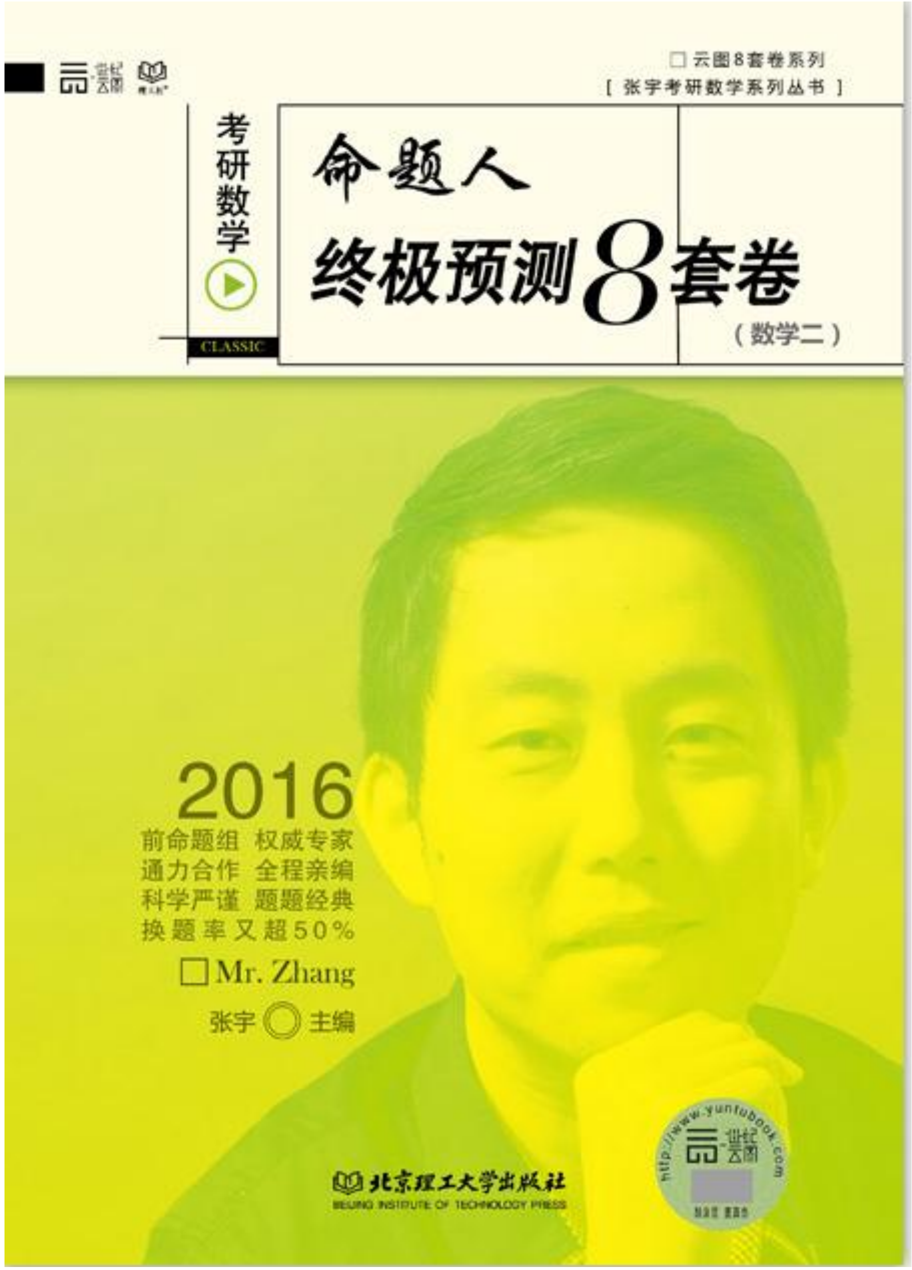
云图8套卷系列
[张宇考研数学系列丛书]
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学二）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
http://www.yuntubook.com

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点____________
______考场_____号
归属区县____________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷（八）

（科目代码：302）

考试时间：上午 8：30—11：30

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题卡指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题卡指定位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题卡和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to0$ 时，$f(x)$与 x^m 为同阶无穷小. 又设 $x\to0$ 时，$F(x)=\int_0^{x^n}f(t)\mathrm{d}t$ 与 x^k 为同阶无穷小，其中 m 与 n 为正整数. 则 $k=$ （　　）

(A)$mn+n$.　　(B)$2n+m$.

(C)$m+n$.　　(D)$mn+n-1$.

(2) $\int_{-1}^{1}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}\right)\mathrm{d}x=$ （　　）

(A)0.　　(B)$\frac{1}{2}$.　　(C)1.　　(D)$\frac{3}{2}$.

(3) 设 e^{-x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数，下述两个反常积分

$$(\mathrm{I})=\int_0^{+\infty}x^4f'(x)\mathrm{d}x,\ (\mathrm{II})=\int_0^{+\infty}x^3f''(x)\mathrm{d}x,$$

正确的结论是 （　　）

(A)$(\mathrm{I})=-3\sqrt{\pi}$，$(\mathrm{II})=3\sqrt{\pi}$.　　(B)$(\mathrm{I})=3\sqrt{\pi}$，$(\mathrm{II})=-3\sqrt{\pi}$.

(C)$(\mathrm{I})=-3\sqrt{\pi}$，$(\mathrm{II})=-3\sqrt{\pi}$.　　(D)$(\mathrm{I})=3\sqrt{\pi}$，$(\mathrm{II})=3\sqrt{\pi}$.

(4)设 $f(x)$在 $x=0$ 处存在 2 阶导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)\neq0$. 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$$ （　　）

(A)$\frac{1}{2}$.　　(B)$\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{1}{4}$.　　(D)$\frac{1}{5}$.

(5)设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 下述命题成立的是 （　　）

(A)$f(x)$在$[-1,1]$上存在原函数.

(B)存在 $g'(0)$.

(C)$g(x)$在$[-1,1]$上存在原函数.

(D)$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处可导.

(6)设 $F(u,v)$具有一阶连续偏导数，且 $z=z(x,y)$由方程 $F\left(\frac{x}{z},yz\right)=0$ 所确定. 又设题中出现的分母不为零，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$ （　　）

(A)0.　　(B)z.　　(C)$\frac{1}{z}$.　　(D)1.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$,则必有　　(　　)

(A)$r(\boldsymbol{A})=1$.

(B)$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$.

(C)$[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-2]=0$.

(D)$[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1]=0$.

(8)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则

①$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$;

②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

③$\boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$;

④$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

其中正确的个数是　　(　　)

(A)1.　　(B)2.

(C)3.　　(D)4.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}=$______.

(10)已知 $\lim\limits_{a\to1^-}(1-a)^p\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{a}}dt$ 存在且不为零,其充要条件是常数 $p=$______,此时该极限值为______.

(11)$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}}=$______.

(12)微分方程 $y'+\frac{1}{x}=xe^{-y}$的通解是 $y=$______.

(13)$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=$______.

(14)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个相似的 3 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.且 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1,$\boldsymbol{B}$ 有特征值 2,3.则行列式 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^{-1}|=$______.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设平面区域D是由参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant2\pi$给出的曲线与$x$轴围成的区域,求二重积分 $\iint\limits_D y^2d\sigma$,其中常数 $a>0$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $y=f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$.

(Ⅰ)讨论函数 $f(x)$的奇偶性,单调性,极值;

(Ⅱ)讨论曲线 $y=f(x)$的凹凸性,拐点,渐近线,并根据以上(Ⅰ)、(Ⅱ)的讨论结果,画出函数 $y=f(x)$的大致图形.

密 封 线 内 不 要 答 题

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且满足 $f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. 试证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=-\dfrac{3f(\xi)}{\xi}$.

(18)(本题满分 10 分)

适当选取函数 $\varphi(x)$,作变量代换 $y=\varphi(x)u$,将 y 关于 x 的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\right)y=0$ 化为 u 关于 x 的二阶常系数线性齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda u=0$. 求 $\varphi(x)$ 及 λ,并求原方程的通解.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}$,$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1\}$. 求 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

(20)(本题满分 11 分)

求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z(x,y)$ 的极值.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设圆盘的半径为 R,厚为 h. 点密度为该点到与圆盘垂直的圆盘中心轴的距离的平方,求该圆盘的质量 m;

(Ⅱ)将以曲线 $y=\sqrt{x}$,$x=1$,$x=4$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体记为 V,设 V 的点密度为该点到旋转轴的距离的平方,求该物体的质量 M.

(22)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 证明:

(Ⅰ)$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\boldsymbol{\eta}+\xi_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解;

(Ⅱ)方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\xi_{n-r}$ 线性表出.

(23)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&1&t\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&2&0\\-1&3&2\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)t 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 等价? 说明理由;

(Ⅱ)t 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 相似? 说明理由.

密 封 线 内 不 要 答 题