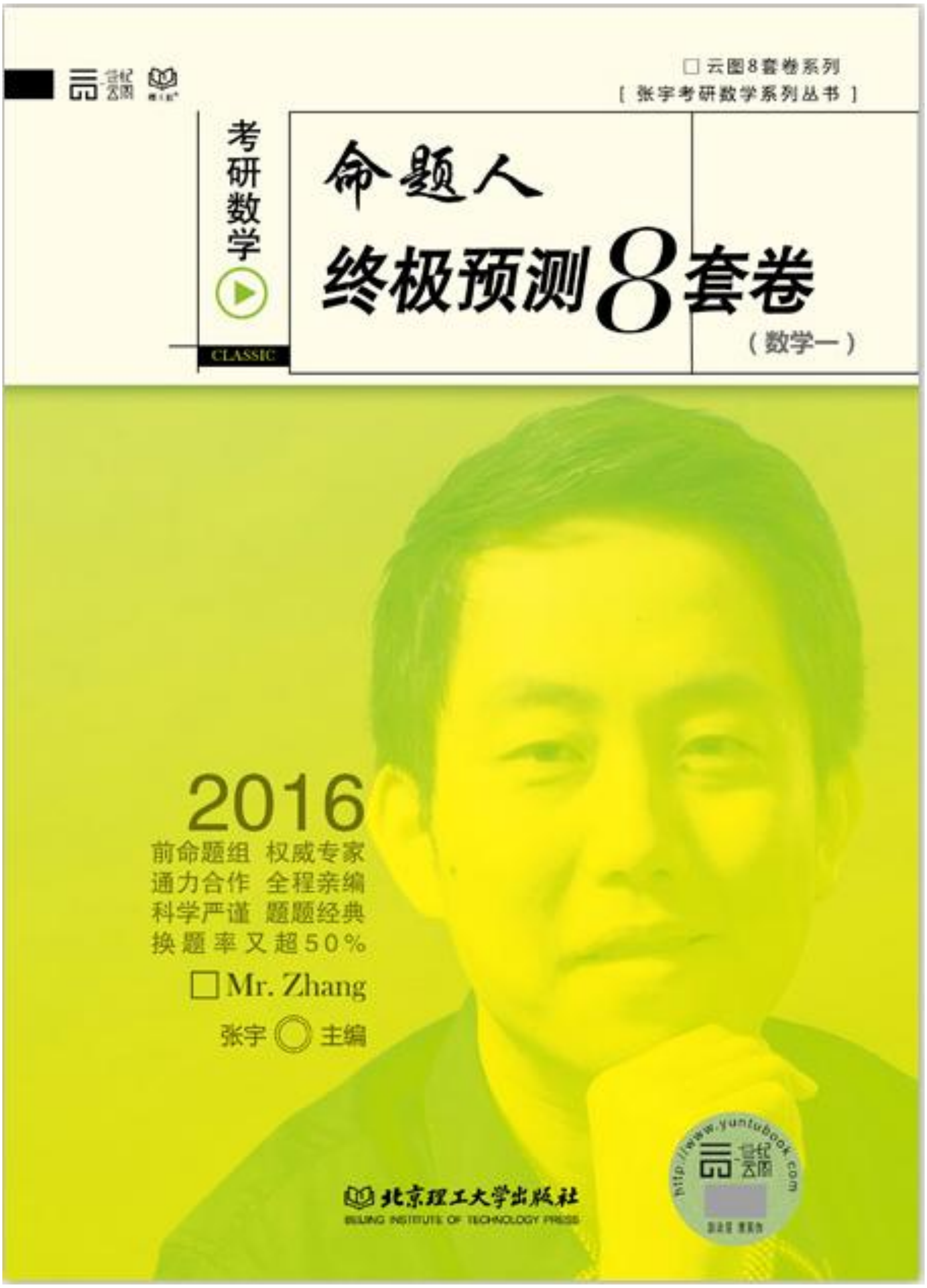

云图8套卷系列
[张宇考研数学系列丛书]
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学一）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
http://www.yuntubook.com

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat\theta) &= E[(\hat\theta-\theta)^2] = E[(\hat\theta-E\hat\theta)+(E\hat\theta-\theta)]^2\\ &= E[(\hat\theta-E\hat\theta)^2+(E\hat\theta-\theta)^2+2(\hat\theta-E\hat\theta)(E\hat\theta-\theta)]\\ &= E[(\hat\theta-E\hat\theta)^2]+E[(E\hat\theta-\theta)^2]+2E[(\hat\theta-E\hat\theta)(E\hat\theta-\theta)]\\ &= E[(\hat\theta-E\hat\theta)^2]+E[(E\hat\theta-\theta)^2]+2(E\hat\theta-E\hat\theta)(E\hat\theta-\theta)\\ &= D(\hat\theta)+(E\hat\theta-\theta)^2.\end{aligned}$$

由（Ⅰ）得 $\mathrm{MSE}(\hat\theta_1)=D(\hat\theta_1)+(E\hat\theta_1-\theta)^2=\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\theta-\theta\right)^2=\frac{2}{n^2}$，

由（Ⅱ）得 $\mathrm{MSE}(\hat\theta_2)=D(\hat\theta_2)+(E\hat\theta_2-\theta)^2=\frac{1}{n}+(\theta-\theta)^2=\frac{1}{n}$，

所以当 $n>2$ 时，$\mathrm{MSE}(\hat\theta_1)<\mathrm{MSE}(\hat\theta_2)$，所以$\hat\theta_1$ 比$\hat\theta_2$ 更好.

【注】 利用平移方法可以快速得到$\hat\theta_1$ 与$\hat\theta_2$ 的期望与方差.

考研数学命题人终极预测卷（八）

一、选择题

(1)**【答案】** (B)

【分析】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n|$ 亦发散. 因若后者收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 又由 $|a_n|\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n|$ 发散，由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，故应选(B).

其他(A)，(C)，(D)均可举出反例如下：

(A)的反例：$b_n=-\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，$a_n=-\frac{1}{n}\leqslant-\frac{1}{n^2}=b_n$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C)的反例：$a_n=\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$，$a_n\leqslant b_n|$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 却收敛.

(D)的反例见(C)的反例.

(2)**【答案】** (D)

【分析】

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^k(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^k\cos x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^k}.$$

所以当 $x\to0$ 时，$\alpha\sim\frac{1}{4}x^3$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^k}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^4}-1)\cdot2x}{hx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{2x^5}{hx^{k-1}}=\frac{2}{h}\lim_{x\to0}\frac{x^6}{x^k}.$$

所以当 $x\to0$ 时，$\beta\sim\frac{1}{3}x^6$.

对于 γ，用带有佩亚诺余项的泰勒展开式展开最方便.

$$\gamma=\sqrt{1-x^4}-\sqrt[3]{1+3x^4}=1-\frac{1}{2}x^4+o_1(x^4)-\left[1+\frac{1}{3}(3x^4)+o_2(x^4)\right]$$

$$=-\frac{3}{2}x^4+o(x^4),$$

所以当 $x\to0$ 时，$\gamma\sim-\frac{3}{2}x^4$. 综合之，从低到高排列应是 α,γ,β. 选(D).

(3)**【答案】** (B)

【分析】 (B)的反例：$f(x)=\sin^2 x$，以 π 为周期，但

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$$

不是周期函数，(B)不正确，选(B).

事实上，设 $f(x)$有周期 T，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 有周期 T 的充要条件是 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$. 证明如下：

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，有 $F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，

可见 $F(x+T)\equiv F(x)$的充要条件是 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$. 证毕.

以下说明(A)，(C)，(D)均正确.

由 $f(x+T)=f(x)$及 $f(x)$可导，有 $f'(x+T)=f'(x)$. 所以 $f'(x)$有周期 T，(A)正确. (C)中的被积函数是 t 的周期函数，由以上证明，$\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=0.$$

而该积分中的被积函数$f(t)-f(-t)$是 t 的奇函数，

$$\int_0^T[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=0$$

成立，所以(C)正确.

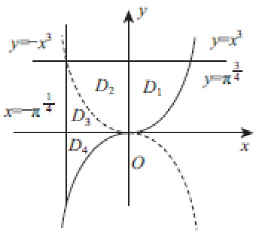
(D)中令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，有

$$F(x+T)-F(x)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0,$$

所以 $F(x)$以 T 为周期，(D)正确.

(4)**【答案】** (D)

【分析】 如图所示，作曲线 $y=-x^3$，连同 x 轴与 y 轴，将 D 分成 4 块，按逆时针方向，这 4 块分别记为 D_1,D_2,D_3 与 D_4.



$$\iint_D[y^2\cos(xy)+\sin(xy)]\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1\cup D_2} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3\cup D_4} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+$$
$$\iint_{D_1\cup D_2}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3\cup D_4}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma.$$
$$\iint_{D_1\cup D_2} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3\cup D_4} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma$$
$$=2\iint_{D_2} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma+2\iint_{D_3} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_2\cup D_3} y^2\cos(xy)\mathrm{d}\sigma$$
$$=2\int_0^{\pi^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}y\int_{-\pi^{\frac{1}{4}}}^{0} y^2\cos(xy)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi^{\frac{3}{4}}} y\sin(\pi^{\frac{1}{4}}y)\mathrm{d}y=2\sqrt{\pi}.$$

由奇偶性，$\iint_{D_1\cup D_2}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma=0$，$\iint_{D_3\cup D_4}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma=0$. 故应选(D).

(5)**【答案】** (B)

【分析】 由题设条件知，$r(\boldsymbol{A})=3$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^* \text{有解} \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^*\mid\boldsymbol{B}^*)=1\Rightarrow r(\boldsymbol{B}^*)\leqslant 1.$$

而当 $r(\boldsymbol{B}^*)=1$ 时，有可能使 $r(\boldsymbol{A}^*\mid\boldsymbol{B}^*)=2$.

如 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \\ & 1\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}^*\mid\boldsymbol{B}^*)=r\begin{bmatrix}1 & & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{O} & & 1\end{bmatrix}=2$，

则 $r(\boldsymbol{A}^*)\neq r(\boldsymbol{A}^*\mid\boldsymbol{B}^*)\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^*$ 无解.

故 $r(\boldsymbol{B}^*)=0$，此时 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，有

$$r(\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{A}^* \mid \boldsymbol{B}^*)=1\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^*\text{有解}.$$

故应选(B).

(6)**【答案】** (C)

【分析】 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & a+1 & 0\\ 0 & 0 & a^2-a-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & a+1 & 0\\ 0 & 0 & (a-2)(a+1)\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，$r(\boldsymbol{A})>0$.

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，故 $r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$.

当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$ 或 2，(A)不成立.

当 $a\neq -1$ 时，必有 $a=2$，$r(\boldsymbol{B})=2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$，(B)不成立.

当 $a\neq 2$ 时，必有 $a=-1$，$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$ 或 2，(D)不成立.

由排除法，故应选(C). 当 $a=2$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$，故(C)正确.

(7)**【答案】** (C)

【分析】 **法一**
$$\begin{aligned}P\{\max\{X,Y\}>\mu\}&=P\{\{X>\mu\}\cup\{Y>\mu\}\}\\&=P\{X>\mu\}+P\{Y>\mu\}-P\{X>\mu,Y>\mu\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant\mu\},\end{aligned}$$

选(C).

法二
$$\begin{aligned}P\{\max\{X,Y\}>\mu\}&=1-P\{\max\{X,Y\}\leqslant\mu\}\\&=1-P\{X\leqslant\mu,Y\leqslant\mu\}\overset{\text{记}}{=}1-P(AB),\end{aligned}$$

其中 $A=\{X\leqslant\mu\}$，$B=\{Y\leqslant\mu\}$.

已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}P\{\min\{X,Y\}\leqslant\mu\}&=1-P\{\min\{X,Y\}>\mu\}=1-P\{X>\mu,Y>\mu\}\\&=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A\cup B})=P(A\cup B)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)=1-P(AB)=\alpha,\end{aligned}$$

选(C).

(8)**【答案】** (B)

【分析】 因为 X_1,X_2 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，则 X_1-X_2，X_1+X_2 均服从 $N(0,2)$，故

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{X_3=-1\}P\{X_1+X_2X_3\leqslant y\mid X_3=-1\}+P\{X_3=1\}P\{X_1+X_2X_3\leqslant y\mid X_3=1\}\\&=P\{X_3=-1\}P\{X_1-X_2\leqslant y\}+P\{X_3=1\}P\{X_1+X_2\leqslant y\}\\&=\frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{y}{\sqrt{2}}\right\}+\frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{y}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=\left[\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

二、填空题

(9)**【答案】** 1

【分析】
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]&=\frac{(x-x_0)f'(x)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}\\&=\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\\&=f''(x_0)-\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=f''(x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)=1.$$

(10)【答案】 -3

【分析】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^3}{\int_1^x y(t)\mathrm{d}t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3(x-1)^2}{y(x)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6(x-1)}{y'(x)}.$

题中所给方程两边对 x 求导，有 $3y^2y'+xy'+y+2x-2=0$，得

$$y'(x)=-\frac{y+2x-2}{3y^2+x}，有\lim_{x\to1}y'(x)=0.$$

再用洛必达法则，
$$\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)}{y'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{6}{y''(x)}.$$

而
$$y''(x)=-\frac{(3y^2+x)(y'+2)-(y+2x-2)(6yy'+1)}{(3y^2+x)^2}，\lim_{x\to1}y''(x)=-2.$$

所以所求极限 $=-3$.

(11)【答案】 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3$

【分析】 由轮换对称性知，$\oint_l x^2\mathrm{d}s=\oint_l y^2\mathrm{d}s=\oint_l z^2\mathrm{d}s$，所以

$$\oint_l x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_l(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_l a^2\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\oint_l\mathrm{d}s.$$

而 $\oint_l\mathrm{d}s$ 为 l 的全长，l 是平面 $x+y+z=a$ 上的圆周，点 O 到此平面的距离为 $d=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，所以 l 的半径为

$$R=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a，$$

所以
$$\oint_l\mathrm{d}s=2\pi R=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a，\quad\oint_l x^2\mathrm{d}s=\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3.$$

(12)【答案】 $\dfrac{\pi R^3}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$

【分析】 球面与锥面的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程为

$$(A+1)x^2+(B+1)y^2=R^2，$$

则相应的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid(A+1)x^2+(B+1)y^2\leqslant R^2\}$. 球面方程（上部）为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}，\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}，\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}，$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma，\quad\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_D R\mathrm{d}\sigma=R\cdot S_D.$$

由于 D 是个椭圆，故 $S_D=\dfrac{\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$，所以 $\iint_S z\mathrm{d}S=\dfrac{\pi R^3}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}$.

(13)【答案】 $\boldsymbol{E}$

【分析】 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，可知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^3-6(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^2+11\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}-5\boldsymbol{E}$$
$$=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-6\boldsymbol{\Lambda}^2+11\boldsymbol{\Lambda}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\boldsymbol{P}\left[\begin{pmatrix}1&&\\&8&\\&&27\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&9\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1-6+11-5&&\\&8-24+22-5&\\&&27-54+33-5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

(14)【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 易知 $EX=\frac{3}{4}, DX=\frac{3}{16}, EY=\frac{1}{2}, DY=\frac{1}{4}$，又 $\rho_{XY}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{3}{16}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{8},$$
$$E(XY)=EXEY+\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

故 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

所以 $P\{X=Y\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)【证】 （Ⅰ）设 $f(x)$ 为连续的偶函数，则
$$F(-x)=\int_{-1}^{1}|-x-t|f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}|x+t|f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{1}^{-1}|x-u|f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-1}^{1}|x-u|f(u)\mathrm{d}u=F(x).$$

所以 $F(x)$ 也是偶函数.

（Ⅱ）$F(x)=\int_{-1}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}(t-x)f(t)\mathrm{d}t$
$$=x\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}tf(t)\mathrm{d}t-x\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$F'(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0.$$

所以曲线 $y=F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是凹的.

(16)【解】 （Ⅰ）
$$\int_0^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(-t\cos t\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}+\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\cos t\mathrm{d}t\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[-(k+1)\pi(-1)^{k+1}+k\pi(-1)^k]$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi=\pi n^2.$$

（Ⅱ）设 $n<x\leqslant n+1(n=0,1,\cdots)$，
$$\pi n^2<\int_0^{x\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t\leqslant\pi(n+1)^2,$$
$$\frac{\pi n^2}{(n+1)^2}<\frac{1}{x^2}\int_0^{x\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t<\frac{\pi(n+1)^2}{n^2},$$

令 $n\to\infty$，由夹逼定理得
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^{x\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t=\pi.$$

(17)【证】（Ⅰ）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$0\leqslant\tan x\leqslant 1$，且仅在两处 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{4}$ 等号成立，所以

$$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=a_n\,(n=1,2,\cdots).$$

又 $a_{n+2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2x+1)\tan^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,d(\tan x)$

$$=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

又因 $a_n>a_{n+2}$，所以 $2a_n>a_n+a_{n+2}$，从而 $a_n>\frac{1}{2(n+1)}$.

因 $2a_{n+2}<a_n+a_{n+2}$，从而 $a_{n+2}<\frac{1}{2(n+1)}$，于是 $a_n<\frac{1}{2(n-1)}(n=2,3,\cdots)$. 得证.

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 $|(-1)^na_n|>\frac{1}{2(n+1)}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^na_n|$ 发散. 又 $a_{n+1}<a_n$，并由已证 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 所以由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 条件收敛.

(18)【解】（Ⅰ）由题设知，存在二元函数 $u(x,y)$，使

$$du=[xy(1+y)-f(x)y]dx+[f(x)+x^2y]dy,$$

即
$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy(1+y)-f(x)y,\frac{\partial u}{\partial y}=f(x)+x^2y.$$

由于 $f(x)$ 具有一阶连续导数，所以 u 的二阶混合偏导数连续，所以有

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x},$$

即有
$$x(1+2y)-f(x)=f'(x)+2xy,$$
$$f'(x)+f(x)=x.$$

连同已知 $f(0)=0$，于是可求得 $f(x)=x-1+e^{-x}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）有

$$du=(xy^2+y-ye^{-x})dx+(x-1+e^{-x}+x^2y)dy.$$

求 $u(x,y)$ 有多种方法.

法一 凑微分法.
$$(xy^2+y-ye^{-x})dx+(x-1+e^{-x}+x^2y)dy$$
$$=xy(ydx+xdy)+(ydx+xdy)+(-ye^{-x}dx+e^{-x}dy)-dy$$
$$=d\left(\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y\right)=0,$$

所以该全微分方程的通解为

$$\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y=C,\text{其中 }C\text{ 为任意常数.}$$

法二 偏积分法. 由
$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy^2+y-ye^{-x},$$

于是
$$u=\frac{1}{2}(xy)^2+yx+ye^{-x}+h(y),$$

其中 $h(y)$ 为 y 的任意可微函数，再由 $\frac{\partial u}{\partial y}=x-1+e^{-x}+x^2y$，

得
$$x^2y+x+e^{-x}+h'(y)=x-1+e^{-x}+x^2y,$$
$$h'(y)=-1,h(y)=-y+C_1\quad(C_1\text{ 为任意常数}).$$

于是
$$u=\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y+C_1,$$

则通解为
$$\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y+C_1=C_2,$$

即
$$\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y=C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

法三 平面第二型曲线积分与路径无关折线法.

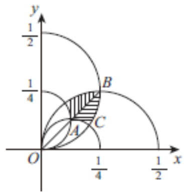
$$u(x,y)=\int_0^x P(t,0)\mathrm{d}t+\int_0^y Q(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y (x-1+e^{-x}+x^2t)\mathrm{d}t$$
$$=xy-y+e^{-x}y+\frac{1}{2}(xy)^2,$$

所以通解为
$$\frac{1}{2}(xy)^2+xy+ye^{-x}-y=C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

(19)**【解】** D 如图阴影部分,为清楚起见,4 个圆只画出有关的 4 个半圆.

D 关于直线 $y=x$ 对称,交点 A、B、C 的极坐标分别为

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\pi}{4}\right),B\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\pi}{4}\right),C\left(\frac{\sqrt{5}}{10},\arctan\frac{1}{2}\right).$$



$$\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}\sigma=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{r}{r^2\cos\theta\sin\theta}\mathrm{d}r$$
$$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\cos\theta\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 2+\ln(\tan\theta)}{\tan\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)$$
$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln 2+\ln u}{u}\mathrm{d}u$$
$$=2\left(\ln 2\cdot\ln u+\frac{1}{2}\ln^2 u\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=2\left(\ln^2 2-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)=\ln^2 2.$$

(20)**【解】** (Ⅰ)
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&5\\1&-1&-2&2\\2&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&-1&-5&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&0&0&-4\end{pmatrix},$$

得方程组(＊)的通解为 $k(-3,-5,1,0)^{\mathrm{T}}$,$k$ 是任意常数.

(Ⅱ)**法一** 方程组(＊)(＊＊)是同解方程组⟺方程组(＊)的通解满足方程组(＊＊)的第 4 个方程,代入得
$$-3ka+(-5k)\cdot 2+bk+0=0,$$
即 $(-3a+b)k=10k$. 因 k 是任意常数,故得 $-3a+b=10$.

法二 方程组(＊)(＊＊)是同解方程组,则方程组(＊＊)中新添方程应可由原方程的三个方程线性表出,即

$$\begin{pmatrix}a\\2\\b\\-5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\\5\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

有解. 对方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\3&-2&1&b\\5&2&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\0&-5&-5&b-3a\\0&-3&-7&-5-5a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&-1&-1&2\\0&0&-4&-5a-11\\0&0&0&b-3a-10\end{pmatrix},$$

故(＊)和(＊＊)同解⟺$b-3a=10$.

(21)**【解】** (Ⅰ)$\xi_1+\xi_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量.

因已知 $\boldsymbol{A}\xi_1=2\xi_1$,$\boldsymbol{A}\xi_2=2\xi_2$,故
$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=2\xi_1+2\xi_2=2(\xi_1+\xi_2).$$

（Ⅱ）$\xi_2+\xi_3$ 不是 A 的特征向量. 假设是，设其对应的特征值为 μ，则有

$$A(\xi_2+\xi_3)=\mu(\xi_2+\xi_3),$$

得

$$2\xi_2-2\xi_3-\mu\xi_2-\mu\xi_3=(2-\mu)\xi_2-(2+\mu)\xi_3=\mathbf{0},$$

因 $2-\mu$ 和 $2+\mu$ 不同时为零，故 ξ_2,ξ_3 线性相关，这和不同特征值对应的特征向量线性无关矛盾，故 $\xi_2+\xi_3$ 不是 A 的特征向量.

（Ⅲ）因 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，故 A^2 有特征值 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=4$. 对应的特征向量仍是 ξ_1,ξ_2,ξ_3，且 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关. 故存在可逆矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，使得

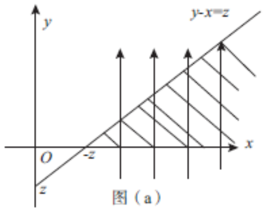
$$P^{-1}A^2P=4E,\quad A^2=P(4E)P^{-1}=4E,$$

从而对任意的 $\beta\neq\mathbf{0}$，有 $A^2\beta=4E\beta=4\beta$，故知任意非零向量 β 都是 A^2 的对应于 $\lambda=4$ 的特征向量.

(22)【解】（Ⅰ）法一　分布函数法.

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{Y-X\leqslant z\}=\iint\limits_{y-x\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时，$f(x,y)$ 的非零区域与 $\{(x,y)\mid y-x\leqslant z\}$ 的交集为图(a)中的阴影部分，

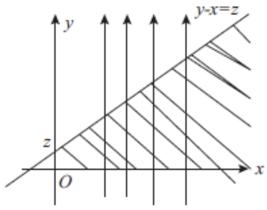


图(a)

$$F_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{z+x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z};$$

当 $z\geqslant0$ 时，$f(x,y)$ 的非零区域与 $\{(x,y)\mid y-x\leqslant z\}$ 的交集为图(b)中的阴影部分，

$$F_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{z+x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z},$$



图(b)

故

$$F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant0,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant0\end{cases}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|}.$$

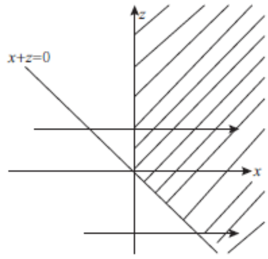
法二　密度函数法.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z+x)\mathrm{d}x,$$

$$f(x,z+x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(z+2x)}, & x>0,z+x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z+2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}$；

当 $z\geqslant0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z+2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$，



图(c)

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant0\end{cases}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|}.$$

（Ⅱ）

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}(x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}+y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=2.$$

(23)【解】　记 X 为事件“从袋中有放回地任取 1 张卡片”，记 X_i 为事件“取出的卡片编号为 i”，X 与 X_i 同分布，此题已知样本分布，即可得到总体 X 分布为

X	1	2	…	N
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	…	$\frac{1}{N}$

（Ⅰ）$\overline{X}=EX=1\times\frac{1}{N}+2\times\frac{1}{N}+\cdots+N\times\frac{1}{N}=\frac{1}{N}(1+2+\cdots+N)=\frac{1}{N}\cdot\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N+1}{2}$，

故 N 的矩估计量为 $\hat{N}_1=2\overline{X}-1$.

又 $\hat{N}_1=1\Rightarrow\overline{x}=1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\\x_i\geqslant1\end{cases}\Rightarrow x_i=1(i=1,\cdots,n)$，故

$P\{\hat{N}_1=1\}=P\{X_1=1,X_2=1,\cdots,X_n=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_n=1\}=\frac{1}{N^n}$.

（Ⅱ）$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;N)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}=\frac{1}{N^n}\quad(1\leqslant x_i\leqslant N)$，

$$N\geqslant\max\{x_i\}\quad(i=1,\cdots,n).$$

故 N 的最大似然估计量为 $\hat{N}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$

$\hat{N}_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布律为

$$\begin{aligned}P\{\hat{N}_2=k\}&=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}=k\}\\&=P\{\hat{N}_2\leqslant k\}-P\{\hat{N}_2\leqslant k-1\}\\&=P\{X_1\leqslant k\}\cdot P\{X_2\leqslant k\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\leqslant k\}-\\&\quad P\{X_1\leqslant k-1\}\cdot P\{X_2\leqslant k-1\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\leqslant k-1\}\\&=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n.\end{aligned}$$