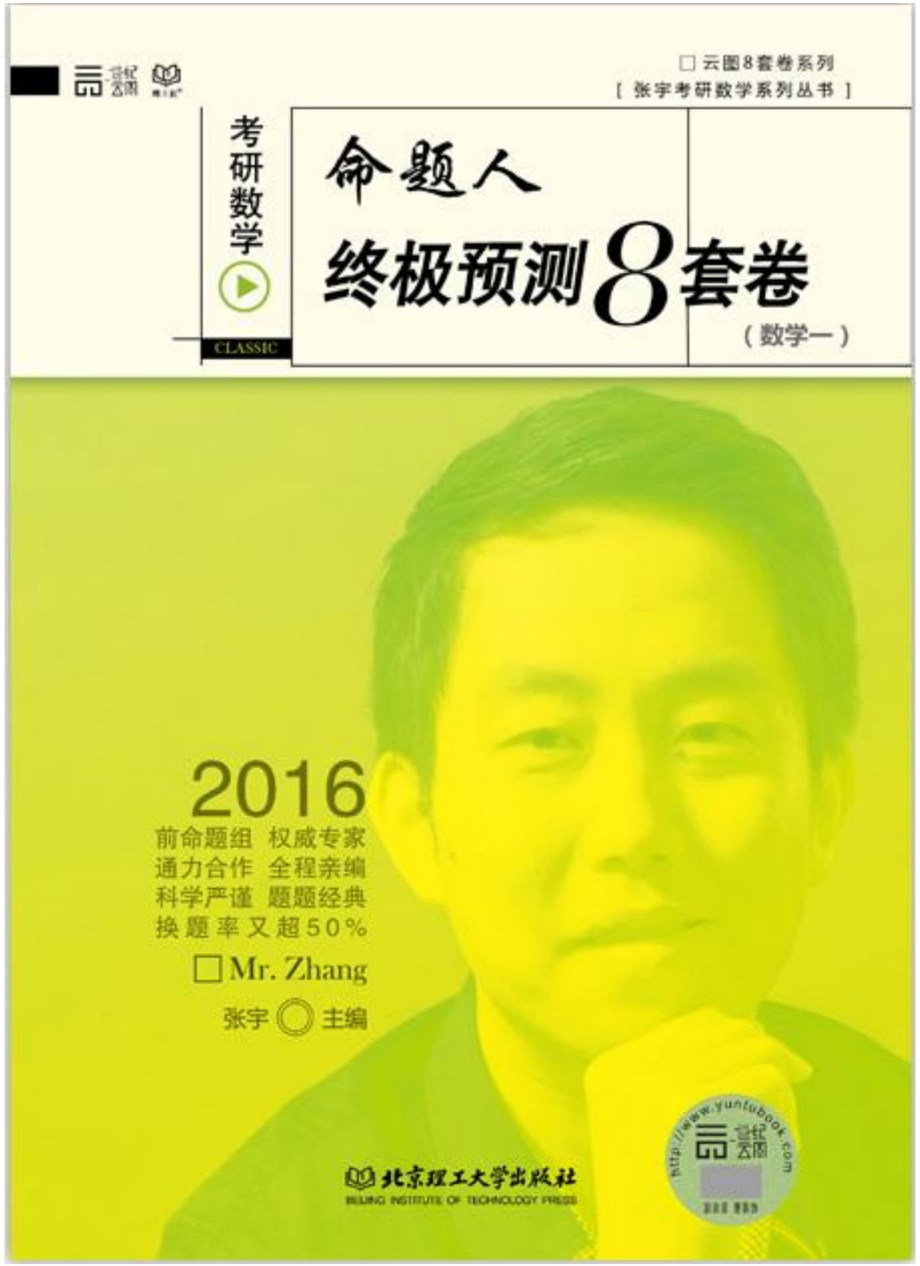
云图8套卷系列
[张宇考研数学系列丛书]
考研数学
CLASSIC
命题人
终极预测8套卷
（数学一）
2016
前命题组 权威专家
通力合作 全程亲编
科学严谨 题题经典
换题率又超50%
Mr. Zhang
张宇 主编
北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点______

______考场______号

归属区县______

(领准考证的区县)

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(八)

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题卡指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题卡指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题卡和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列命题正确的是 ( )

(A) 设 $a_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.

(B) 设 $|a_n| \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散.

(C) 设 $a_n \leqslant |b_n| (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦发散.

(D) 设 $|a_n| \leqslant |b_n| (n=1,2,\cdots)$,并设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.

(2) 当 $x \to 0$ 时,下列 3 个无穷小

$$\alpha = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}, \beta = \int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1)\mathrm{d}t, \gamma = \sqrt{1-x^4} - \sqrt[3]{1+3x^4},$$

按后一个无穷小比前一个高阶的次序排列,正确的次序是 ( )

(A) α,β,γ. (B) γ,β,α.

(C) γ,α,β. (D) α,γ,β.

(3) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数(若下式中用到 $f'(x)$,则设 $f'(x)$ 存在),则以下结论中不正确的是 ( )

(A) $f'(x)$ 必以 T 为周期.

(B) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(C) $\int_0^x [f(t) - f(-t)]\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 必以 T 为周期.

(4) 设 D 是由曲线 $y = x^3$ 与直线 $x = -\pi^{\frac{1}{4}}, y = \pi^{\frac{3}{4}}$ 所围成的有界闭区域,则

$$\iint_D [y^2\cos(xy) + \sin(xy)]\mathrm{d}\sigma = \qquad (\quad)$$

(A) $-2\pi^{\frac{1}{4}}$. (B) $2\pi^{\frac{1}{4}}$.

(C) $-2\pi^{\frac{1}{2}}$. (D) $2\pi^{\frac{1}{2}}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 4 阶方阵,且 $r(\boldsymbol{A}) = 3$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^*$ 有解的充要条件是 ( )

(A) $r(\boldsymbol{B}) \leqslant 1$. (B) $r(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$.

(C) $r(\boldsymbol{B}) \leqslant 3$. (D) $r(\boldsymbol{B}) \leqslant 4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是三阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{bmatrix}$,则 ( )

(A) $a=-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　(B) $a\neq-1$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(C) $a=2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　(D) $a\neq 2$ 时,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(7) 已知随机变量 X 与 Y 都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,如果 $P\{\max\{X,Y\}>\mu\}=a(0<a<1)$,则 $P\{\min\{X,Y\}\leqslant\mu\}=$ ( )

(A) $\frac{a}{2}$.　(B) $1-\frac{a}{2}$.　(C) a.　(D) $1-a$.

(8) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且 X_1,X_2 均服从 $N(0,1)$, $P\{X_3=-1\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$,则 $Y=X_1+X_2X_3$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 为 ( )

(A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.　(B) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$.　(C) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$.　(D) $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f''(x_0)=2$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=$ ________.

(10) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定并且满足 $y(1)=0$ 的函数,则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{\int_1^x y(t)dt}=$ ________.

(11) 设 l 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=a \end{cases}(a>0)$ 一周,则空间第一型曲线积分 $\oint_l x^2 ds=$ ________.

(12) 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被锥面 $z=\sqrt{Ax^2+By^2}$ 截下的小的那部分,并设其中 A,B,R 均为正常数且 $A\neq B$,则第一型曲面积分 $\iint_S z dS=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$,则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(14) 设随机变量 $X\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$,$Y\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,且 X 与 Y 的相关系数为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $P\{X=Y\}=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)$ 连续,$F(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt,x\in[-1,1]$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 为偶函数,证明:$F(x)$ 也是偶函数;

(Ⅱ) 若 $f(x)>0$(当 $-1\leqslant x\leqslant1$),证明:曲线 $y=F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是凹的.

(16) (本题满分 10 分)

(Ⅰ) 计算 $\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt$,其中 n 为正整数;

(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^{x\pi}t|\sin t|dt$.

密　封　线　内　不　要　答　题

(17)（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，试证明：

（Ⅰ）$a_{n+1}<a_n$ 且 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$（当 $n\geqslant 2$）；

（Ⅱ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$f(0)=0$，且微分方程

$$[xy(1+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

为全微分方程.

（Ⅰ）求 $f(x)$；

（Ⅱ）求该全微分方程的通解.

(19)（本题满分 10 分）

设平面区域 D 用极坐标表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{1}{4}\cos\theta\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\cos\theta,\ \frac{1}{4}\sin\theta\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\sin\theta\right\}.$$

求二重积分 $\iint\limits_D\frac{1}{xy}\mathrm{d}\sigma$.

(20)（本题满分 11 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}\qquad(*)$$

添加一个方程 $ax_1+2x_2+bx_3-5x_4=0$ 后，成为方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0,\\ax_1+2x_2+bx_3-5x_4=0.\end{cases}\qquad(**)$$

（Ⅰ）求方程组 $(*)$ 的通解；

（Ⅱ）a,b 满足什么条件时，$(*)(**)$ 是同解方程组.

(21)(本题满分 11 分)

A 是 3 阶矩阵,有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$,对应两个线性无关的特征向量为 ξ_1,ξ_2,$\lambda_3=-2$ 对应的特征向量是 ξ_3.

(Ⅰ)问 $\xi_1+\xi_2$ 是否是 A 的特征向量?说明理由;

(Ⅱ)$\xi_2+\xi_3$ 是否是 A 的特征向量?说明理由;

(Ⅲ)证明:任意三维非零向量 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0})$ 都是 A^2 的特征向量,并求对应的特征值.

(22)(本题满分 11 分)

设 X 和 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $Z=Y-X$ 的密度函数;

(Ⅱ)求数学期望 $E(X+Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设袋中有编号为 $1\sim N$ 的 N 张卡片,其中 N 未知,现从中有放回地任取 n 张,所得号码为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

(Ⅰ)求 N 的矩估计量 $\hat{N}_1$,并计算概率 $P\{\hat{N}_1=1\}$;

(Ⅱ)求 N 的最大似然估计量 $\hat{N}_2$,并求 $\hat{N}_2$ 的分布律.

密 封 线 内 不 要 答 题