南京理工大学

2012 年春博士学位研究生入学考试试题

科目代码：2259　　　科目名称：泛函分析与概率论　　满分：100 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$K(x,y)$ 是三角形 $\{(x,y)|a \le x \le b, a \le y \le x\}$ 上的连续函数，而且 $|K(x,y)| \le M$。证明：对任何常数 λ，方程

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续函数解 $\phi(x)$。（10 分）

二. 设 T 是 $L^2[0,1]$ 上的有界线性算子。证明：如果 T 把 $L^2[0,1]$ 中的连续函数映射成连续函数，则 T 是 $C[0,1]$ 上的有界线性算子。（8 分）

三. 设 X 是无限维的 Banach 空间。证明：必不存在一列有限维的子空间 $X_n, n = 1,2,\cdots$ 使得 $X = \bigcup X_n$。（8 分）

四. 设 X 是赋范线性空间。证明：X 上的任何弱有界集必是强有界集。（8 分）

五. 举例说明共鸣定理中，空间的完备性条件不可缺少。（8 分）

六. 证明：由 l^2 到 l^1 的有界线性算子是紧算子。（8 分）

七、（10 分）设 (Ω, F, P) 为概率空间，σ 代数 $G \subset F$，x 为实值随机变量，$E(|x|) < +\infty$，实函数 f 若满足：1）$f \in G$；2）$\forall B \in G$ 有 $\int_B fP(d\omega) = \int_B XP(d\omega)$，则称 f 为 x 关于 G 的条件期望，记为 $E(x|G)$. 试证明条件期望 $E(x|G)$ 具有性质：若 $G_1 \subset G_2 \subset F$，则 $E(E(x|G_2)|G_1) = E(E(x|G_1)|G_2) = E(x|G_1)$。

八、（20 分）设实值随机变量 $x_1,\ldots,x_n$ 是独立的实值随机变量，

(1) 试证明 $y = \sum_{i=1}^n x_i$ 的特征函数 $\varphi_y(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{x_i}(t)$；

(2) 若进一步有 $P(|x_i| < a) = 1, i = 1,\ldots,n;$ 且 $b_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i) \to \infty$，求证：$\dfrac{y - m(y)}{\sigma(y)}$ 的分布趋向于均值为 0，标准差为 1 的 Gauss 分布.

九、（20 分）试利用 Kolmogorov 不等式与 Borel-Cantelli 引理证明强大数定律。