南京理工大学

2012年博士学位研究生入学考试试题

科目代码：2221　科目名称：高等线性代数　满分：100分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、用 $P[t]_3$ 记次数不超过 3 的所有多项式组成的向量空间，求 $P[t]_3$ 上的求导算子 $\frac{d}{dt}$ 在基 $\{1, t+t^3, t^2, t^3\}$ 下的矩阵 A，并求 A 的不变因子和 Jordan 标准形。（12分）

二、设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为 n 阶正定 Hermite 矩阵，证明：

(1) $\det A \le a_{nn}\det A_{n-1}$，其中 A_{n-1} 为 A 的 $(n-1)$ 阶顺序主子阵，且等号成立当且仅当 $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$；（8分）

(2) $\det A \le \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$　（6分）

三、设 A 为 n 阶非奇异矩阵，对矩阵范数 $\|\cdot\|$，A 的条件数为 $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$，证明对任意 n 阶奇异矩阵 B，有

$$\mathrm{cond}(A) \ge \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

（12分）

四、设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，证明在 C^n 上存在与之相容的向量范数。（12分）

五、设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$，说明关系式

$$\frac{d}{dt}(A(t))^m = m(A(t))^{m-1}\frac{d}{dt}A(t)$$

一般不成立。问该式在什么条件下能成立？（12分）

六、对 $A\in C^{n\times n}$，证明：$\cos(A+2\pi I)=\cos A$。（12分）

七、设 A、B 分别是数域 F 上 $m\times p$ 和 $p\times n$ 矩阵，$W=\{B\alpha \mid \alpha\in F^n \text{ 且 } AB\alpha=0\}$ 为 F^p 的子集，证明 W 是 F^p 的子空间，并且 $\dim W = \mathrm{rank}B-\mathrm{rank}(AB)$。（12分）

八、设 W_1 与 W_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，$\alpha\in V$ 且 $W_1=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，$W_2=\mathrm{span}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t\}$。证明：

(1) $\alpha\perp W_1$ 的充分必要条件是 $(\alpha,\beta_i)=0\ (i=1,2,\cdots,s)$；（7分）

(2) $W_1\perp W_2$ 的充分必要条件是 $(\beta_i,\gamma_j)=0\ (i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t)$。(7分)

南京理工大学

2012年春秋博士学位研究生入学考试试题

科目代码：2222　　**科目名称：数学物理方程**　　**满分：100分**

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一．（1）根据实参数α，确定如下方程的类型

$$u_{xx}-2\alpha u_{xy}-3\alpha^2u_{yy}+\alpha u_y+u_x=0 \qquad ①$$

（2）化方程①为标准形式；

（3）求方程①的通解。　　（18分）

二．在$R^3\times R^+$中，求问题

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\\u(x,y,z,0)=0\\u_t(x,y,z,0)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{7}{2}}\end{cases}$$

的解。　　（15分）

三．利用特征线法求解初值问题：

$$\begin{cases}u_x+u_y=x+y\\u(x,0)=0\end{cases}$$

（15分）

四．利用Fourier变换方法求解初值问题：

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=0 & x\in R,t>0\\u(x,0)=x^2+1 & x\in R\end{cases}$$

$2t+x^2+1$

（15分）

五．设$\Omega=\left\{(x,y)\in R^2\middle|0<x<1,0<y<1\right\}$，$u\in C^2(\overline{\Omega})$。在$\overline{\Omega}$中，$\Delta u=0$。

对任意的$x\in(0,1)$，$u(x,0)=u(x,1)=0$。证明函数$f(x)=\int_0^1u^2(x,y)dy$

在区间$(0,1)$内部没有拐点。　　（15分）

六．设B_r是平面上的半径为r的圆盘。$u\in C^2(\overline{B_1})$满足

$$\begin{cases}\Delta u=0 & (x,y)\in B_1\\u(x,y)=y^2 & (x,y)\in\partial B_1\text{且}x\geq0\\u(x,y)=y & (x,y)\in\partial B_1\text{且}x\leq0\end{cases}$$

求$\iint\limits_{B_{\frac{1}{2}}}u(x,y)dxdy$。其中$\partial B_1$是$B_1$的边界。　　（11分）

七．设B是平面上的闭单位圆盘，$u\in C^2(B)$满足

$$u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}=1$$

(1) $u(x,y)$是否一定只能在B的边界上取得最大值；

(2) 给出一个满足方程的函数，使得它在B的内部取得最小值。　（11分）

南京理工大学

2012年博士学位研究生入学考试试题

科目代码:2223　　科目名称:数 学(计算方法)　　满分:100分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项;②所有答案必须写在答题纸上,写在本试题纸或草稿纸上均无效;③本试题纸必须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、已知由数据 $(0,0)$ 、$(0.5,y)$、$(1,3)$和$(2,2)$构造出的三次插值多项式 P_3 的 x^3 的系数是6,试确定数据 y 的值。(**10分**)

二、分别用复化梯形公式和复化辛普森公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x dx$ 时,要求截断误差不能超过0.5×10^{-5},则[0,1]区间等分分别需要多少等份?(**10分**)

三、证明:不存在 $A_k, x_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ 使得求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的代数精度超过 $2n+1$ 次。(**10分**)

四、设矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵,证明: $\|x\|_A=\sqrt{x^T Ax}$ 是向量范数。(**15分**)

五、证明迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法,并在取初值 x_0 充分接近 $\sqrt{a}$ 时,求 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}$。(**10分**)

六、对于常微分方程 $y'=f\left(x,y(x)\right)$,证明迭代格式 $y_{n+1}=y_n+f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)$ 是二阶的,并求其绝对稳定区间。(**15分**)

七、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$,利用迭代法求矩阵 A 的最接近于 1 的近似特征值以及对应的特征向量.(保留3位有效数字)(**15分**)

八、给定线性方程组 $\begin{bmatrix}-2&1&3\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\0\\2\end{bmatrix}$,写出求解该方程组的 Gauss-Seidel 迭代和 Jacobi 迭代的迭代格式,并分析这两种迭代法的收敛性。(**15分**)

南京理工大学

2012年博士学位研究生入学考试试题

科目代码：2224　　科目名称：数理统计　　满分：100分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！④解题所需附表在试卷后面

一．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_{11},X_{12},\dots,X_{1n})$与$(X_{21},X_{22},\dots,X_{2n})$是取自该总体的两个独立样本。$\bar{X}_1$和$\bar{X}_2$分别是这两个样本的样本均值。试问：n 至少应多大才能使得事件$\{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|<\sigma\}$的概率大于 0.95?　　（15分）

二．设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是总体 X 中的一个子样，

(1) 求参数λ的极大似然估计；

(2) 求 X 的中位数$x_{0.5}$的极大似然估计。　　（15分）

三．某工厂生产滚珠，从某日生产的产品中随机抽取 9 个，测得直径（mm）如下：

14.5, 14.6, 15.1, 14.8, 14.4, 15.0, 14.8, 14.6, 15.1

(1) 用矩法估计该日生产的滚珠直径的均值与方差；

(2) 如果滚珠直径服从正态分布，求直径均值的 95%置信区间。

(3) 如果滚珠直径服从正态分布，试在显著性水平 0.05 下检验直径测量值的标准差是否超过 0.05 ？　　（15分）

四．设总体 X 的密度函数为

$$f(x\mid\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2} & 0<x<\theta<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是总体 X 中的一个子样。假如未知参数θ的先验分布为

$$h(\theta)=\begin{cases}3\theta^2 & 0<\theta<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

在均方损失下，求θ的贝叶斯估计。　　（15分）

五．某公司的考勤员试图证明周一的缺勤是其他日缺勤的 2 倍，已有三月的缺勤记录如下（每周工作 5 天）全部损失 890 个工作日

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
损失工作日数	304	176	139	141	130

试用χ^2拟合优度检验法，在水平$\alpha=2.5\%$下检验考勤员的论断是否成立。

（15分）

六 对于线性模型$Y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i, i=1,2,\dots,n$，其中$\varepsilon_i, i=1,2,\dots,n$是两两不相关，且均值为 0，方差为$\sigma^2$的随机误差序列。设$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$是参数$\beta_0,\beta_1$的最小二乘估计，记$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_i$。求证$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2$是$\sigma^2$的无偏估计。　　（25分）

附表：

附表 I：$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	1.14	1.42	1.55	1.645	1.96	2.33	2.57	2.75
Φ(x)	0.8729	0.9222	0.9394	0.95	0.975	0.99	0.9949	0.997

附表 II：$P\{t(n)\le t_\alpha(n)\}=\alpha$

n	5	6	8	9	10	12	14
α=0.975	2.5706	2.4469	2.3060	2.2622	2.2281	2.1788	2.1448
α=0.95	2.0150	1.9432	1.8595	1.8331	1.8125	1.7823	1.7613

附表 III：$P\{\chi^2(n)\le\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$

n	4	8	9	10	12	14
α=0.975	11.143	11.143	19.023	20.483	23.337	26.119
α=0.025	0.484	2.180	2.700	3.247	4.404	5.629