**绝密 ★ 启用前**

**2014年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）**

**数学（理工类）**

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

**第Ⅰ卷**

**注意事项：**

1.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

•如果事件，互斥，那么 •如果事件，相互独立，那么

 .

•圆柱的体积公式. •圆锥的体积公式.

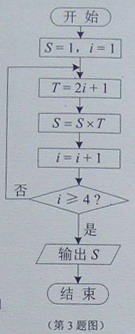
其中表示圆柱的底面面积， 其中表示圆锥的底面面积，

表示圆柱的高. 表示圆锥的高.

**一、选择题：在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.**

（1）是虚数单位，复数（　　）

（A） （B）　 （C） （D）

（2）设变量，满足约束条件则目标函数的最小值为（　　）

（A）2　　 （B）3　 （C）4　　　 （D）5

（3）阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出的的值为（　　）

（A）15 （B）105

（C）245 （D）945

（4）函数的单调递增区间是（　　）

（A） （B）

（C） （D）

（5）已知双曲线的一条渐近线平行于直线：，双曲线的一个焦点在直线上，则双曲线的方程为（　　）

（A）　　 （B）

（C）　 　（D）

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（6）如图，是圆的内接三角形，的平分线交圆于点，交于点，过点的圆的切线与的延长线交于点.在上述条件下，给出下列四个结论：

①平分；

②；

③；

④.

则所有正确结论的序号是（　　）

（A）①② （B）③④ （C）①②③ （D）①②④

（7）设，则|“”是“”的（　　）

（A）充要不必要条件 （B）必要不充分条件

（C）充要条件　　 （D）既不充要也不必要条件

（8）已知菱形的边长为2，，点分别在边上，，.若，，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

**第Ⅱ卷**

注意事项：

1．用黑色墨水钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

**二、填空题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分.把答案填在题中横线上.）**

（9）某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法，从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查.已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为4：5：5：6，则应从一年级本科生中抽取\_\_\_\_\_\_\_名学生.

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（10）已知一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为\_\_\_\_\_\_\_.

（11）设是首项为，公差为-1的等差数列，为其前项和.若成等比数列，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（12）在中，内角所对的边分别是.已知，，则的值为\_\_\_\_\_\_\_.

（13）在以为极点的极坐标系中，圆和直线相交于两点.若是等边三角形，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（14）已知函数，.若方程恰有4个互异的实数根，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**三、解答题（本题共6道大题，满分80分**．**解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤**．**）**

（15）（**本小题满分13分**）

已知函数，.

（Ⅰ）求的最小正周期；

（Ⅱ）求在闭区间上的最大值和最小值.

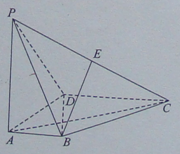
（16）（**本小题满分13分**）

某大学志愿者协会有6名男同学，4名女同学. 在这10名同学中，3名同学来自数学学院，其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这10名同学中随机选取3名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）.

（Ⅰ）求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率；

（Ⅱ）设为选出的3名同学中女同学的人数，求随机变量的分布列和数学期望.

（17）（**本小题满分13分**）

如图，在四棱锥中，底面，，，，，点为棱的中点.

（Ⅰ）证明 ；

（Ⅱ）求直线与平面所成角的正弦值；

（Ⅲ）若为棱上一点，满足，求二面角的余弦值.

（18）（**本小题满分13分**）

设椭圆（）的左、右焦点为，右顶点为，上顶点为.已知.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设为椭圆上异于其顶点的一点，以线段为直径的圆经过点，经过原点的直线与该圆相切. 求直线的斜率.

（19）（**本小题满分14分**）

已知和均为给定的大于1的自然数.设集合，集合.

（Ⅰ）当，时，用列举法表示集合；

（Ⅱ）设，，，其中

（20）（**本小题满分14分**）

已知函数，.已知函数有两个零点，且.

（Ⅰ）求的取值范围；

（Ⅱ）证明 随着的减小而增大；

（Ⅲ）证明 随着的减小而增大.

**参考答案**

一、选择题

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | A | B | B | D | A | D | C | C |

（1）是虚数单位，复数（　　）

（A） （B）　 （C） （D）

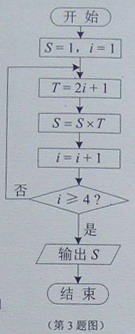
解：A .

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（2）设变量，满足约束条件则目标函数的最小值为（　　）

（A）2　　 （B）3　 （C）4　　　 （D）5

解：B 作出可行域，如图。结合图象可知，当目标函数通过点（1，1）时，取得最小值3.

（3）阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出的的值为（　　）

（A）15 （B）105

（C）245 （D）945

解：B 时，，；时，，；

时，，，输出.

（4）函数的单调递增区间是（　　）

（A） （B）

（C） （D）

解：D ，解得或.由复合函数的单调性知的单调递增区间为.

（5）已知双曲线的一条渐近线平行于直线：，双曲线的一个焦点在直线上，则双曲线的方程为（　　）

（A）　　 （B）

（C）　 　（D）

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。解：A 依题意得，所以，，双曲线的方程为.

（6）如图，是圆的内接三角形，的平分线交圆于点，交于点，过点的圆的切线与的延长线交于点.在上述条件下，给出下列四个结论：①平分；②；③；④.

则所有正确结论的序号是（　　）

（A）①② （B）③④ （C）①②③ （D）①②④

解：D 由弦切角定理得，又，所以∽，所以，即，排除A、C.

又，排除B.

（7）设，则|“”是“”的（　　）

（A）充要不必要条件 （B）必要不充分条件

（C）充要条件　　 （D）既不充要也不必要条件

解：C 设，则，所以是上的增函数，“”是“”的充要条件.

（8）已知菱形的边长为2，，点分别在边上，，.若，，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

解：C 因为，所以.

因为，所以，.

因为，所以，即 ①

同理可得 ②，①+②得.

**第Ⅱ卷**

注意事项：

1．用黑色墨水钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

**二、填空题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分.把答案填在题中横线上.）**

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（9）某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法，从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查.已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为4：5：5：6，则应从一年级本科生中抽取\_\_\_\_\_\_\_名学生.

解：60 应从一年级抽取名.

（10）已知一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为\_\_\_\_\_\_\_.

解： 该几何体的体积为.

（11）设是首项为，公差为-1的等差数列，为其前项和.若成等比数列，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

解： 依题意得，所以，解得.

（12）在中，内角所对的边分别是.已知，，则的值为\_\_\_\_\_\_\_.

解： 因为，所以，解得，.

所以.

（13）在以为极点的极坐标系中，圆和直线相交于两点.若是等边三角形，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

解：3 圆的方程为，直线为.

因为是等边三角形，所以其中一个交点坐标为，代入圆的方程可得.

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（14）已知函数，.若方程恰有4个互异的实数根，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

解：或

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。显然.

（ⅰ）当与相切时，，此时恰有3个互异的实数根.

（ⅱ）当直线与函数相切时，，此时恰有2个互异的实数根.

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。结合图象可知或.

解2：显然，所以.

令，则.

因为，

所以.

结合图象可得或.

**三、解答题（本题共6道大题，满分80分**．**解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤**．**）**

（15）（**本小题满分13分**）

已知函数，.

（Ⅰ）求的最小正周期；

（Ⅱ）求在闭区间上的最大值和最小值.

（15）本小题主要考查两角和与差的正弦公式、二倍角公式与余弦公式，三角函数的最小正周期、单调性等基础知识. 考查基本运算能力. 满分13分.

（Ⅰ）**解：**由已知，有







.

所以，的最小正周期.

（Ⅱ）**解：**因为在区间上是减函数，在区间上是增函数.

，，.

所以，函数在闭区间上的最大值为，最小值为.

（16）（**本小题满分13分**）

某大学志愿者协会有6名男同学，4名女同学. 在这10名同学中，3名同学来自数学学院，其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这10名同学中随机选取3名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）.

（Ⅰ）求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率；

（Ⅱ）设为选出的3名同学中女同学的人数，求随机变量的分布列和数学期望.

（16）本小题主要考查古典概型及其概率计算公式，互斥事件、离散型随机变量的分布列与数学期望等基础知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力. 满分13分.

（Ⅰ）**解：**设“选出的3名同学来自互不相同的学院”为事件，则

.

所以，选出的3名同学来自互不相同学院的概率为.

所以，的最小正周期.

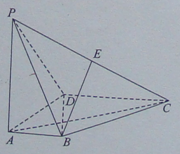
（Ⅱ）**解：**随机变量的所有可能值为0，1，2，3.

.

所以，随机变量的分布列是

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

随机变量的数学期望.

（17）（**本小题满分13分**）

如图，在四棱锥中，底面，，，，，点为棱的中点.

（Ⅰ）证明 ；

（Ⅱ）求直线与平面所成角的正弦值；

（Ⅲ）若为棱上一点，满足，求二面角的余弦值.

高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。（17）本小题主要考查空间两条直线的位置关系，二面角、直线与平面所成的角，直线与平面垂直等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力. 满分13分.

**（方法一）**

依题意，以点为原点建立空间直角坐标系（如图），可得，，，.由为棱的中点，得.

（Ⅰ）**证明：**向量，，故. 所以，.

（Ⅱ）**解：**向量，.

设为平面的法向量，则即

不妨令，可得为平面的一个法向量.于是有

.

所以，直线与平面所成角的正弦值为.

（Ⅲ）**解：**向量，，，.

由点在棱上，设，.

故.

由，得，

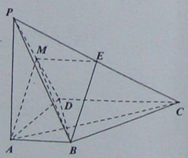
因此，，解得.即.

设为平面的法向量，则即

不妨令，可得为平面的一个法向量.

取平面的法向量，则

.

易知，二面角是锐角，所以其余弦值为.

**（方法二）**

（Ⅰ）**证明：**如图，取中点，连接，.

由于分别为的中点， 故，且，又由已知，可得且，故四边形为平行四边形，所以.

因为底面，故，而，从而平面，

因为平面，于是，又，所以.

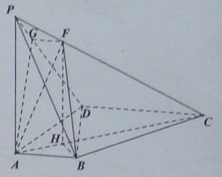
（Ⅱ）**解：**连接，由（Ⅰ）有平面，得，而，故.

又因为，为的中点，故，可得，所以平面，故平面平面.

所以直线在平面内的射影为直线，而，可得为锐角，故为直线与平面所成的角.

依题意，有，而为中点，可得，进而.

故在直角三角形中，，因此.

 所以，直线与平面所成角的正弦值为.

（Ⅲ）**解：**如图，在中，过点作交于点.

因为底面，故底面，从而.又，得平面，因此.

在底面内，可得，从而.在平面内，作交于点，于是.

由于，故，所以四点共面.

由，，得平面，故.

所以为二面角的平面角.

在中，，，，

由余弦定理可得，.

所以，二面角的斜率值为.

（18）（**本小题满分13分**）

设椭圆（）的左、右焦点为，右顶点为，上顶点为.已知.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设为椭圆上异于其顶点的一点，以线段为直径的圆经过点，经过原点的直线与该圆相切. 求直线的斜率.

（18）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、圆的方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.满分13分.

（Ⅰ）**解：设**椭圆的右焦点的坐标为.由，可得，

又，则.

所以，椭圆的离心率.

，所以，解得，.

（Ⅱ）**解：**由（Ⅰ）知，.故椭圆方程为.

设.由，，有，.

由已知，有，即.又，故有

. ①

又因为点在椭圆上，故

. ②

由①和②可得.而点不是椭圆的顶点，故，代入①得，即点的坐标为.

设圆的圆心为，则，，进而圆的半径.

设直线的斜率为，依题意，直线的方程为.

由与圆相切，可得，即，

整理得，解得.

所以，直线的斜率为或.

（19）（**本小题满分14分**）

已知和均为给定的大于1的自然数.设集合，集合.

（Ⅰ）当，时，用列举法表示集合；

（Ⅱ）设，，，其中，. 证明：若，则.

（19）本小题主要考查集合的含义和表示，等比数列的前项和公式，不等式的证明等基础知识和基本方法. 考查运算能力、分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

（Ⅰ）**解：**当，时，，.

可得，.

（Ⅱ）**证明：**由，，，，及，可得







.

所以，.

（20）（**本小题满分14分**）

已知函数，.已知函数有两个零点，且.

（Ⅰ）求的取值范围；

（Ⅱ）证明 随着的减小而增大；

（Ⅲ）证明 随着的减小而增大.

（20）本小题主要考查函数的零点、导数的运算、利用导数研究函数的性质等基础知识和方法. 考查函数思想、化归思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

（Ⅰ）**解：**由，可得.

下面分两种情况讨论：

（1）时

在上恒成立，可得在上单调递增，不合题意.

（2）时，

由，得.

当变化时，，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | ＋ | 0 | － |
|  | ↗ |  | ↘ |

这时，的单调递增区间是；单调递减区间是.

于是，“函数有两个零点”等价于如下条件同时成立：

1°；2°存在，满足；

3°存在，满足.

由，即，解得，而此时，取，满足，且；取，满足，且.

所以，的取值范围是.

（Ⅱ）**证明：**由，有.

设，由，知在上单调递增，在上单调递减. 并且，当时，；当时，.

由已知，满足，. 由，及的单调性，可得，.

对于任意的，设，，其中；，其中.

因为在上单调递增，故由，即，可得；类似可得.

又由，得.

所以，随着的减小而增大.

（Ⅲ）**证明：**由，，可得，.

故.

设，则，且解得，.所以，

. ①

令，，则.

令，得.

当时，.因此，在上单调递增，故对于任意的，，由此可得，故在上单调递增.

因此，由①可得随着的增大而增大.

而由（Ⅱ），随着的减小而增大，所以随着的减小而增大.