全国硕士研究生入学统一考试数学三模拟试题参考答案

一、选择题

(1) **B** (2) **C** (3) **D** (4)**C** (5)**D** (6)**A** (7) **C** (8)**D**

二、填空题

(9) $x_0 f'(x_0)-f(x_0)$ (10) $g'(0)$ (11) $y=x\cos x$ (12) z (13) 2

(14) 1

三、解答题

(15)解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{e}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x-e}{e}\right]^{\frac{e}{(1+\frac{1}{x})^x-e}}\right\}^{\frac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}}$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}\ \underset{=\!=\!=}{\frac{1}{x}=t}\ \dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]'$

$=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\dfrac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}=-\dfrac{1}{2}$,

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{e}\right]^x=e^{-\frac{1}{2}}$

(16)解：

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f_u'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=yf_u'+xf_v',\quad ,\frac{\partial g}{\partial y}=f_u'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_v'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf_u'-yf_v'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\cdot[f_{uu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}]+f_v'+x\cdot[f_{vu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}]$$

$$=y^2f_{uu}''+xyf_{uv}''+f_v'+xyf_{vu}''+x^2f_{vv}''=y^2f_{uu}''+x^2f_{vv}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x\cdot[f_{uu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}]-f_v'-y\cdot[f_{vu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{vv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}]$$

$$=x^2f_{uu}''-xyf_{uv}''-f_v'-xyf_{vu}''+y^2f_{vv}''=x^2f_{uu}''+y^2f_{vv}''$$

$$D=(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2})=x^2+y^2$$

(17)解：利用 $x^2+y^2=1$ 将原来的积分区域 D 一分为二并记

$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le1\}$，

$D_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2>1\}$，

于是 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1| d\sigma = -\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2-1)rdr + \iint\limits_D (x^2+y^2-1)dxdy - \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$= \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2-1)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2-1)rdr = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

(18) **证明：**

构造函数 $F(x)=f(x)e^{\lambda x}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔中值定理知：$\exists \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi)=0$.

$[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]e^{\lambda\xi}=0$，而 $e^{\lambda\xi}\neq 0$，故 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

(19)解：先求收敛域：令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n}\right|<1$ 可得，$|x|<1$，故幂级数的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=\pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$；

再求和函数 $s(x)$：令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 x^{n-1}dx]' = x[\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n]'$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx]' = x[\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n]' = x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

故 $s(x)= x[\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n]' = x\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

在上式中令 $x=\dfrac{1}{3}$ 可得 $s\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n} = \dfrac{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3} = \dfrac{3}{2}$.

(20)解：由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关与 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可知，$r(A)=3$

又由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-0\alpha_4=0$，即

$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$.故，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$为 $Ax=0$ 的基础解系.

另外，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$，故$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$为 $Ax=\beta$ 的一个特解.

因此，$Ax=\beta$ 的通解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(21)解：I）由题设知，对于二次型对应的实对称矩阵 A，有 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，即通过正交变换 Q 使得 A 对角化为一个对角阵 Λ，Λ 中对角线上的元素分别为 A 的三个特征值.则可知 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$，由 Q 的第三列为 $(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，可知 $(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$ 为 A 对应于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位化后的特征向量.又由 A 为实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量必正交，故可据此求得 A 中对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的两个特征向量.设 $\xi_3=(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，与其正交的向量为 $\beta=(x_1,x_2,x_3)$，有 $(\xi_3,\beta)=0$，即 $\sqrt{2}/2\,x_1+\sqrt{2}/2\,x_3=0$，也相当于 $x_1+x_3=0$，解此齐次线性方程组可得其基础解系中两个线性无关的解向量 $\eta_1=(0,1,0)^T$，$\eta_2=(-1,0,1)^T$，可以得到 $(\eta_1,\eta_2)=0$，即 η_1 与 η_2 正交，故将 η_1 与 η_2 分别单位化得 $\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(-\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，则有正交矩阵

$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

（II）$A+E=\begin{pmatrix}3/2&0&-1/2\\0&2&0\\-1/2&0&3/2\end{pmatrix}$，先要证其为正定矩阵，有两种方法：

方法 1：求其全部特征值，若均大于零，则可得 $A+E$ 为正定矩阵.设 $B=A+E$，有

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3/2&0&1/2\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_3-\frac{1}{2}r_1}{=}$$

$(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，得 $A+E$ 的全部特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，均大于零，故 $A+E$ 为正定矩阵.

方法 2：证 $A+E$ 的各阶顺序主子式均大于零，1 阶主子式 $D_1=3/2>0$，2 阶主子式

$D_2=\begin{vmatrix}3/2&0\\0&2\end{vmatrix}=3>0$，3 阶主子式

$D_3=|A+E|=\begin{vmatrix}3/2&0&-1/2\\0&2&0\\-1/2&0&3/2\end{vmatrix}=2\times(9/4-1/4)=4>0$，即得 $A+E$ 为正定矩阵.

(22)解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x}&x\ge0\\0&x<0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y}&y\ge0\\0&y<0\end{cases}$

（2）$P(X+Y\le1)=\iint\limits_{x+y\le1}f(x,y)dxdy=\ 1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$

(23)解：令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x\theta dx+\int_1^2(1-\theta)xdx=\overline{X}$，故 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$.

构造似然函数

$L(\theta)=\theta\times\theta\times\theta\times\cdots\times\theta(N个)\times(1-\theta)\times(1-\theta)\times\cdots\times(1-\theta)(n-N个)$ 化简后即

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$

左右两端取对数并令其导数为零，即

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$，可得 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.