全国硕士研究生入学统一考试数学二模拟试题参考答案

一、 选择题

(1) **B** (2) **C** (3) **D** (4)**C** (5)**A** (6) **B** (7) **D** (8) A

二、 填空题

(9) $x_0 f'(x_0)-f(x_0)$ (10) $g'(0)$ (11) $6a$ (12) z (13) $y=x\cos x$

(14) 2

三、解答题

(15)解：

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\frac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n}=\frac{(3-x_n)(2+x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}$$

$x_1=10>3$，设 $x_n>3$ 又 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>3$

故 $x_n>3$ 对所有的 n 均成立，故 $x_{n+1}-x_n<0$ 即数列是单调下降且有下界，故有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \quad (a\ge 3)$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$ 即 $a=\sqrt{6+a}$ 故 $a=3$

(16)解：
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{x})^x}{e}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{(1+\frac{1}{x})^x-e}{e}\right]^{\frac{e}{(1+\frac{1}{x})^x-e}}\right\}^{\frac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}}$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[(1+\frac{1}{x})^x-e]x}{e}\ \underline{\underline{\frac{1}{x}=t}}\ \frac{1}{e}\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\frac{1}{e}\lim_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]'$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}=-\frac{1}{2},$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{x})^x}{e}\right]^x=e^{-\frac{1}{2}}$$

(17)解：
$$f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=\int_0^x (tx-t^2)dt+\int_x^1 (t^2-tx)dt$$

$$=(\frac{1}{2}xt^2-\frac{t^3}{3})\Big|_0^x+(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}xt^2)\Big|_x^1=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}.$$

$f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<x<1$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$；单调增区间是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.

由 $f''(x)=2x>0$，$0<x<1$，知 $(0,1)$ 为凹区间.

又由 $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=0$，$f''(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$ 知 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3}$ 为极小值

(18)解：（1）设切点为 $\left(x_0,x_0^2\right)$，则切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0^2)$，故

$\frac{1}{12}=\int_0^{x_0^2}(\frac{y+x_0^2}{2x_0}-\sqrt{y})dy$，故切点为 $(1,1)$

故切线方程为 $y=2x-1$

（2）$V=\pi\int_0^1 x^4dx-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{30}$

(19)解：

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f_u'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=yf_u'+xf_v',\quad ,\frac{\partial g}{\partial y}=f_u'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_v'\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf_u'-yf_v'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\cdot[f_{uu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}]+f_v'+x\cdot[f_{vu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial x}]$$

$$=y^2f_{uu}''+xyf_{uv}''+f_v'+xyf_{vu}''+x^2f_{vv}''=y^2f_{uu}''+x^2f_{vv}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x\cdot[f_{uu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}]-f_v'-y\cdot[f_{vu}''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{vv}''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}]$$

$$=x^2f_{uu}''-xyf_{uv}''-f_v'-xyf_{vu}''+y^2f_{vv}''=x^2f_{uu}''+y^2f_{vv}''$$

$$D=(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2})=x^2+y^2$$

(20)解：利用 $x^2+y^2=1$ 将原来的积分区域 D 一分为二并记

$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，

$D_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2>1\}$，

于是 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma = -\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2-1)rdr + \iint\limits_D (x^2+y^2-1)dxdy - \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$= \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2-1)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2-1)rdr = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

(21)**证明：**

构造函数 $F(x)=f(x)e^{\lambda x}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔中值定理知：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$.

$[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]e^{\lambda\xi}=0$，而 $e^{\lambda\xi}\neq 0$，故 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

(22)解：由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关与 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可知，$r(A)=3$

又由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-0\alpha_4=0$，即

$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$.故，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

另外，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$，故 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

为 $Ax=\beta$ 的一个特解.

因此，$Ax=\beta$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(23)解：I）由题设知，对于二次型对应的实对称矩阵 A，有 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

即通过正交变换 Q 使得 A 对角化为一个对角阵 Λ， Λ 中对角线上的元素分别为 A 的三个特征值.则可知 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$，由 Q 的第三列为 $(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，可知 $(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$ 为 A 对应于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位化后的特征向量.又由 A 为实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量必正交，故可据此求得 A 中对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的两个特征向量.设 $\xi_3=(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，与其正交的向量为 $\beta=(x_1,x_2,x_3)$，有 $(\xi_3,\beta)=0$，即 $\sqrt{2}/2\,x_1+\sqrt{2}/2\,x_3=0$，也相当于 $x_1+x_3=0$，解此齐次线性方程组可得其基础解系中两个线性无关的解向量 $\eta_1=(0,1,0)^T$，$\eta_2=(-1,0,1)^T$，可以得到 $(\eta_1,\eta_2)=0$，即 η_1 与 η_2 正交，故将 η_1 与 η_2 分别单位化得 $\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(-\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，则有正交矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$，使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

（II）$A+E=\begin{pmatrix}3/2&0&-1/2\\0&2&0\\-1/2&0&3/2\end{pmatrix}$，先要证其为正定矩阵，有两种方法:

方法 1：求其全部特征值，若均大于零，则可得 $A+E$ 为正定矩阵.设 $B=A+E$，有

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3/2&0&1/2\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_3-\frac{1}{2}r_1}{=}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$，得 $A+E$ 的全部特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，均大于零，故 $A+E$ 为正定矩阵.

方法 2：证 $A+E$ 的各阶顺序主子式均大于零，1 阶主子式 $D_1=3/2>0$，2 阶主子式

$D_2=\begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=3>0$，3 阶主子式

$D_3=|A+E|=\begin{vmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{vmatrix}=2\times(9/4-1/4)=4>0$，即得 $A+E$ 为正定矩阵.