全国硕士研究生入学统一考试数学一模拟试题参考答案

一、 选择题

(1) **B** (2) **D** (3) **A** (4) **B** (5) **D** (6) **A** (7) **C** (8)**D**

二、 填空题

(9) $x_0 f'(x_0)-f(x_0)$ (10) $y=x\cos x$ (11) z (12) $\frac{3}{2}\pi(a-b)-2b-\sin 3$

(13) 2 (14) 1

三、解答题

(15)解：

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\frac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n}=\frac{(3-x_n)(2+x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}$$

$x_1=10>3$，设 $x_n>3$ 又 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>3$

故 $x_n>3$ 对所有的 n 均成立，故 $x_{n+1}-x_n<0$ 即数列是单调下降且有下界，故有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \quad (a\ge 3)$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$ 即 $a=\sqrt{6+a}$ 故 $a=3$

(16)解：

利用 $x^2+y^2=1$ 将原来的积分区域 D 一分为二并记

$$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2>1\},$$

于是 $$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)dxdy-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

(17) 解：添加有向曲面 $\Sigma_1:z=1$，取其下侧，根据高斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dV-(-1)\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz+\pi$$

$$=-\frac{3}{2}\pi+\pi=-\frac{1}{2}\pi$$

(18)证明：

构造函数$F(x)=f(x)e^{\lambda x}$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

且$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知：$\exists\xi\in(a,b)$，使$F'(\xi)=0$.

$[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]e^{\lambda\xi}=0$，而$e^{\lambda\xi}\ne 0$，故 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

(19)解：先求收敛域：令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2x^{n+1}}{n^2x^n}\right|<1$可得，$|x|<1$，故幂级数的收敛半径为 1，

收敛区间为$(-1,1)$，当 $x=\pm 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$发散，故收敛域为$(-1,1)$；

再求和函数$s(x)$：令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}dx]'=x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n]'$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx]'=x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n]'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

故$s(x)=x[\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n]'=x\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

在上式中令$x=\dfrac{1}{3}$可得$s\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}=\dfrac{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3}=\dfrac{3}{2}$.

(20)解：由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关与$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$可知，$r(A)=3$

又由$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-0\alpha_4=0$，即

$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$.故，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$为 $Ax=0$ 的基础解系.

另外，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可知，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$，故$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$为 $Ax=\beta$ 的一个特解.

因此，$Ax=\beta$ 的通解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(21)解：I）由题设知，对于二次型对应的实对称矩阵 A，有 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

即通过正交变换 Q 使得 A 对角化为一个对角阵 Λ，Λ 中对角线上的元素分别为 A 的三个特征值.则可知 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$，由 Q 的第三列为$(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，可知$(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$为 A 对应于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位化后的特征向量.又由 A 为实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量必正交，故可据此求得 A 中对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的两个特征向量.设 $\xi_3=(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，与其正交的向量为 $\beta=(x_1,x_2,x_3)$，有 $(\xi_3,\beta)=0$，即 $\sqrt{2}/2\,x_1+\sqrt{2}/2\,x_3=0$，也相当于 $x_1+x_3=0$，解此齐次线性方程组可得其基础解系中两个线性无关的解向量 $\eta_1=(0,1,0)^T$，$\eta_2=(-1,0,1)^T$，可以得到$(\eta_1,\eta_2)=0$，即 η_1 与 η_2 正交，故将 η_1 与 η_2 分别单位化得 $\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(-\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)^T$，则有正交矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$，使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

（II）$A+E=\begin{pmatrix}3/2&0&-1/2\\0&2&0\\-1/2&0&3/2\end{pmatrix}$，先要证其为正定矩阵，有两种方法：

方法 1：求其全部特征值，若均大于零，则可得 $A+E$ 为正定矩阵.设 $B=A+E$，有

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3/2&0&1/2\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\1/2&0&\lambda-3/2\end{vmatrix}\overset{r_3-\frac{1}{2}r_1}{=}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$，得 $A+E$ 的全部特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，均大于零，故 $A+E$ 为正定矩阵.

方法 2：证 $A+E$ 的各阶顺序主子式均大于零，1 阶主子式 $D_1=3/2>0$，2 阶主子式

$D_2=\begin{vmatrix}3/2&0\\0&2\end{vmatrix}=3>0$，3 阶主子式

$D_3=|A+E|=\begin{vmatrix}3/2&0&-1/2\\0&2&0\\-1/2&0&3/2\end{vmatrix}=2\times(9/4-1/4)=4>0$，即得 $A+E$ 为正定矩阵.

(22)解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

（2）$P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\ 1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$

(23)解：令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\theta dx+\int_1^2(1-\theta)xdx=\overline{X}$，故 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}-\overline{X}$.

构造似然函数

$L(\theta)=\theta\times\theta\times\theta\times\cdots\times\theta(N个)\times(1-\theta)\times(1-\theta)\times\cdots\times(1-\theta)(n-N个)$ 化简后即

$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$

左右两端取对数并令其导数为零，即

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$，可得 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.