

注意：
因以下项目填写不清，
影响成绩，责任自负

准考证号：

姓名：

考试地点：

考场号：

座位号：

归属区县：

(领取准考证的区县)

密
封
线
内
不
许
答
题

绝密★启用前

新东方在线
<http://www.koolearn.com/>

全国硕士研究生入学统一考试数学(三) 模拟试题

考生注意事项

- 1、答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、考场信息及准考证号。
- 2、答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
- 3、填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或者签字笔。
- 4、考试结束后将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	单项选择题	多项选择题	分析题	总计
总分	16	34	50	100
得分				

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$. 讨论 $f(x)$ 的间断点，其结论是 ()

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x=1$
(C) 存在间断点 $x=0,1$ (D) 存在间断点 $x=-1$

2. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小中阶数最高的是 ()

- (A) $\ln(1+x^2) - x^2$ (B) $\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2$
(C) $\int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$ (D) $e^{x^2} - 1 - x^2$

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f'(0) = f''(0) = 0$ ，则下列说法中一定正确的是 ()

- (A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的零点；
(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点
(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则 $(0, f(0))$ 是曲线的拐点
(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\sin x} = 1$ ，则 $(0, f(0))$ 是曲线的拐点

4. 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有 () 个实根。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 无穷多

5. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维非零列向量，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ， A^* 是 A

的伴随矩阵，若齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1, 0, -2, 0)^T$ ，则 $A^*x=0$ 的基础解系为 ()

- (A) α_1, α_2 (B) α_1, α_3
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

6. 设 A 是三阶可逆矩阵，其中 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ，将 A 的第一行与第二行对换得到 B ，

再将 B 的第1列与第3列对换得到 C ，则 $C^{-1} = ()$

(A) $\begin{bmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix}$

7. 设随机变量 $X \sim t(n)$, 若 $Y = \frac{1}{X^2}$ 则 ()

- (A) $Y \sim \chi^2(n)$ (B) $Y \sim \chi^2(n-1)$ (C) $Y \sim F(n,1)$ (D) $Y \sim F(1,n)$

8. 设 $X \sim N(0,1)$, \bar{X}, S^2 为样本均值和样本方差, 则 $\bar{X}^2 + (1 - \frac{1}{n})S^2$ 的期望与方差分别为 ()

- (A) $0 \quad \frac{2}{n^2}$ (B) $1 \quad \frac{1}{n^2}$ (C) $0 \quad \frac{2}{n}$ (D) $1 \quad \frac{2}{n}$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g(0) = 1$, 若 $f(x)$ 在

$x=0$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 微分方程 $y' + y \tan x = \cos x$ 的满足 $y(0) = 0$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$

12. 已知 $\frac{x}{z} = g(\frac{y}{z})$, 其中 g 具有一阶连续的导数, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 设 A 为三阶方阵, 满足主对角线上的元素之和等于 0, 且 $A^2 - A - 2E = 0$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

14. (X, Y) 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 则

$E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 9 分)

求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1 + \frac{1}{x})^x}{e} \right]^x$

16. (本题满分 10 分) $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又

$g(x, y) = f(xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2))$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

密

封

线

内

不

许

答

题

(

密

封

线

内

不

许

答

题

)

17. (本题满分 11 分) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$ 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

18. (本题满分 11 分) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\forall \lambda \in R, \exists \xi \in (a, b)$ 使得: $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

19. (本小题满分 11 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数并依此求出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 的和.

20. (本小题满分 11 分) 已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

21. (本小题满分 11 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

- (I) 求矩阵 A .
- (II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

22. (本小题满分 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) X, Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$

(2) $P(X+Y \leq 1)$

23. (本小题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ 1-\theta & 1 \leq x < 2, \text{ 其中 } \theta \text{ 是未知} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

参数 $(0 < \theta < 1)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的矩估计和最大似然估计.

