

注意：  
因以下项目填写不清，  
影响成绩，责任自负

准考证号：

姓名：

考试地点：

考场号：

座位号：

归属区县：

(领取准考证的区县)

密  
封  
线  
内  
不  
许  
答  
题

绝密★启用前

新东方在线  
<http://www.koolearn.com/>

## 全国硕士研究生入学统一考试数学（一） 模拟试题

### 考生注意事项

- 1、答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、考场信息及准考证号。
- 2、答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
- 3、填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或者签字笔。
- 4、考试结束后将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

### 本卷得分

题型	单项选择题	多项选择题	分析题	总计
总分	16	34	50	100
得分				

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ . 讨论  $f(x)$  的间断点，其结论是 ( )

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点  $x=1$   
(C) 存在间断点  $x=0,1$  (D) 存在间断点  $x=-1$

2. 设函数  $f(x)$  在点  $x=0$  的某邻域内具有连续的二阶导数，且  $f'(0) = f''(0) = 0$ ，则下列说法中一定正确的是 ( )

- (A)  $x=0$  为  $f(x)$  的零点；  
(B)  $x=0$  为  $f(x)$  的极值点  
(C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则  $(0, f(0))$  是曲线的拐点  
(D) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\sin x} = 1$ ，则  $(0, f(0))$  是曲线的拐点

3.  $y'' - 2y' + y = 3xe^x + \sin x$  的特解的形式是 ( )

- (A)  $(ax+b)x^2e^x + A\cos x + B\sin x$  (B)  $(ax+b)e^x + A\cos x + B\sin x$   
(C)  $(ax+b)e^x + A\sin x$  (D)  $(ax+b)x^2e^x + A\sin x$

4. 有下列命题：①  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n+1} + u_{2n})$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛；②  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$  收敛

③  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散；④  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都发散；其中正

确的是 ( )

- (A) ①② (B) ②③ (C) ①④ (D) ③④

5. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是四维非零列向量，记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ， $A^*$  是  $A$

的伴随矩阵，若齐次方程组  $Ax=0$  的基础解系为  $(1,0,-2,0)^T$ ，则  $A^*x=0$  的基础解系为

( )

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2$  (B)  $\alpha_1, \alpha_3$   
(C)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

6. 设  $A$  是三阶可逆矩阵, 其中  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , 将  $A$  的第一行与第二行对换得到  $B$ ,

再将  $B$  的第 1 列与第 3 列对换得到  $C$ , 则  $C^{-1} = ( )$

(A)  $\begin{bmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

(C)  $\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix}$

7. 设随机变量  $X \sim t(n)$ , 若  $Y = \frac{1}{X^2}$  则  $( )$

- (A)  $Y \sim \chi^2(n)$  (B)  $Y \sim \chi^2(n-1)$  (C)  $Y \sim F(n,1)$  (D)  $Y \sim F(1,n)$

8. 设  $X \sim N(0,1)$ ,  $\bar{X}, S^2$  为样本均值和样本方差, 则  $\bar{X}^2 + (1 - \frac{1}{n})S^2$  的期望与方差分别为  $( )$

- (A)  $0 \quad \frac{2}{n^2}$  (B)  $1 \quad \frac{1}{n^2}$  (C)  $0 \quad \frac{2}{n}$  (D)  $1 \quad \frac{2}{n}$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处可导, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 微分方程  $y' + y \tan x = \cos x$  的满足  $y(0) = 0$  的特解为  $\underline{\hspace{2cm}}$

11. 已知  $\frac{x}{z} = g(\frac{y}{z})$ , 其中  $g$  具有一阶连续的导数, 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 设  $L$  为  $4x^2 + 9y^2 = 36$  在第一象限中的部分, 方向为从点  $(3,0)$  到  $(0,2)$ , 则  $I = \int_L [e^y \cos x - ay]dx + [e^y \sin x - b(x+y)]dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 设  $A$  为三阶方阵, 满足主对角线上的元素之和等于 0, 且  $A^2 - A - 2E = 0$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

14.  $(X,Y)$  的联合概率密度函数为  $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 则

$E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 9 分) 设  $x_1 = 10$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求之.

16. (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$  其中  $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

17. (本题满分 10 分)

计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为  $z = x^2 + y^2$  介于  $z = 0$  和  $z = 1$  之间的部分, 取上侧.

密

封

线

内

不

许

答

题

密  
封  
线  
内  
不  
许  
答  
题

18. (本题满分 10 分) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导,  $f(a) = f(b) = 0$ ,  
证明:  $\forall \lambda \in R, \exists \xi \in (a, b)$  使得:  $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

19. (本题满分 11 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$  的和函数并依此求出  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$  的和.

20. (本题满分 11 分) 已知 4 阶方阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为 4 维列向量,  
其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关,  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ , 如果  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 求线性方程组  
 $Ax = \beta$  的通解.

21. (本题满分 11 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$  在正交变换  $X = QY$  下的标准型  
为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $Q$  的第三列为  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ .  
(I) 求矩阵  $A$ .  
(II) 证明  $A + E$  为正定矩阵, 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

22. (本题满分 11 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1)  $X, Y$  的边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$

(2)  $P(X+Y \leq 1)$

23. (本题满分 11 分) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ 1-\theta & 1 \leq x < 2, \text{ 其中 } \theta \text{ 是未知参} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

数 ( $0 < \theta < 1$ ),  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 记  $N$  为样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中小于 1 的个数, 求  $\theta$  的矩估计和最大似然估计.

